Gesammelte Materialien aus der Mathematischen Schülergesellschaft

Daniel Platt

Stand: 10. Juli 2017

Inhaltsverzeichnis

1. Vorwort

Diese Materialien habe ich während meiner Zeit als Zirkelleiter für die Mathematische Schülergesellschaft “Leonhard Euler” an der Humboldt-Universität zu Berlin erstellt. Die Inhalte eignen sich für einen zweijährigen Kurs mit Schülern der siebten bzw. achten Klasse bei circa 30 Sitzungen pro Jahr á 90 Minuten.

Im Mathematikunterricht in der Schule geht es – insbesondere bis zum Ende der Klassenstufe 6 – hauptsächlich darum, Mathematik anzuwenden, um Probleme zu lösen. In der Mathematischen Schülergesellschaft geht es hauptsächlich darum, Mathematik zu verstehen. Dass einem dies dann häufig im Nachhinein Methoden liefert, um Probleme zu lösen, ist ein netter Nebeneffekt, der aber nicht im Vordergrund steht.

Es wurde Wert darauf gelegt, alle Inhalte so kurz und einfach wie möglich zu präsentieren. Daher eignet sich das Skript gut als Nachschlagewerk, nicht aber zum Selbststudium. Dafür ist es nicht mitreißend genug geschrieben und bietet nicht genügend Beispiele.

Ich freue mich über Rückmeldungen jeder Art: zum Beispiel Fragen zum Inhalt, Kritik und Fehlerkorrekturen. Schreiben Sie mir dazu gern eine E-Mail an d.platt@web.de.

2. Rechentricks und erste Beweise

2.1 Rechentricks für die Multiplikation von Zahlen

Im Folgenden betrachten wir ein paar Tricks, die einem dabei helfen können, Multiplikation und oder Addition schneller im Kopf berechnen zu können. Falls man zum Beispiel die Multiplikation $79 \cdot 81$ berechnen möchte, so könnte man das Ergebnis wie üblich durch schriftliche Multiplikation berechnen:

$$\begin{array}{ccccc}
7 & 9 & \cdot & 8 & 1 \\
\hline
 & 6 & 3 & 2 & \\
 & & & 7 & 9 \\
\hline
 & 6 & 3 & 9 & 9
\end{array}$$

Dabei könnte einem nun folgendes auffallen: 79 und 81 liegen beide nur 1 entfernt von der Zahl 80, und das Ergebnis der Rechnung ist gerade $80 \cdot 80 - 1$. Wir vermuten, dass das nicht nur für 80 gilt und überprüfen das an einem Beispiel: $49 \cdot 51 = 2499$ und andererseits $50 \cdot 50 - 1 = 2500 - 1 = 2499$, also gilt unsere Vermutung auch in diesem Fall. Die Frage ist nun, ob die Vermutung auch wirklich in *jedem* Fall gilt. Weil wir allerdings schlecht *jeden* möglichen Fall ausprobieren können, müssen wir einen Beweis für unsere Vermutung in einem beliebigen Fall angeben.

Dazu formulieren wir unsere Vermutung zunächst mathematisch exakt und beweisen sie dann:

Satz 2.1 Wenn die Differenz zweier Zahlen 2 beträgt, dann ist das Produkt dieser beiden Zahlen gleich dem Quadrat der Zahl, die in der Mitte der beiden Zahlen liegt, minus 1.

Beweis. Wir bezeichnen mit x die Zahl, die zwischen den beiden Zahlen liegt. Das heißt, die kleinere der beiden Zahlen ist $x - 1$ und die größere der beiden Zahlen ist $x + 1$. Wir berechnen jetzt das Produkt $x \cdot y$ einmal mit Trick und einmal ohne Trick:

$$\begin{aligned}
\text{ohne Trick: } & (x-1)(x+1) = x^2 - x + x - 1 = x^2 - 1 \\
\text{mit Trick: } & x^2 - 1,
\end{aligned}$$

das heißt, die Rechnungen mit und ohne Trick liefern beide das gleiche Ergebnis. Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Ein weniger offensichtlicher Trick kann einem dabei helfen, zweistellige Zahlen miteinander zu multiplizieren. Wollen wir zum Beispiel das Produkt $16 \cdot 17$ berechnen, so können wir folgenden Trick benutzen, um nicht die schriftliche Multiplikation ausführen zu müssen.

Verfahren 2.2 Multiplikation zweistelliger Zahlen zwischen 10 und 19 (Beispiel $16 \cdot 17$).

(i) Addiere die zweite Ziffer der zweiten Zahl zur ersten Zahl. ($16 + 7 = 23$)

(ii) Hänge eine 0 an das Zwischenergebnis an. ($23 \to 230$)

(iii) Addiere das Produkt der zweiten Ziffern beider Zahlen. Das Ergebnis ist das Produkt der beiden Startzahlen. ($230 + 6 \cdot 7 = 272$)

Natürlich stellt man sich nun sofort die Frage: Funktioniert das immer, oder hatten wir im Fall $16 \cdot 17$ einfach Glück? Man könnte nun alle Kombinationen durchprobieren, d.h. $10 \cdot 10$, $10 \cdot 11$, $10 \cdot 12$, ... betrachten. Das würde aber lang dauern und es wäre schön, einen Beweis für zwei *beliebige* Zahlen anzugeben. Das tun wir im Folgenden und benutzen dazu folgende Notation:

Definition 2.3 Ein Strich über mehreren Zahlen nebeneinander bedeutet, dass diese Zahlen nebeneinander als eine neue Zahl gelesen werden sollen.

Für $x = 4$ und $y = 6$ bedeutet das zum Beispiel $\overline{xy} = 46$. Würde man den Strich weglassen, so würde das bedeuten $xy = x \cdot y = 24$. Diese Notation ist nur interessant, wenn man Unbekannte notiert. Sind konkrete Ziffern angegeben, so ist die Strich-Notation zwar nicht falsch, aber zumindest überflüssig, beispielsweise $\overline{720} = 720$.

Damit können wir nun beweisen, dass das Verfahren 2.2 funktioniert.

Satz 2.4 Verfahren 2.2 liefert für Zahlen zwischen 10 und 19 (10 und 19 einschließlich) immer das richtige Ergebnis.

Beweis. Gegeben seien nun zwei *beliebige* Zahlen zwischen 10 und 19. Mithilfe unserer neuen Schreibweise können wir diese Zahlen schreiben als $\overline{1a}$ und $\overline{1b}$ für zwei Ziffern a und b.

Wie im Beweis von Satz 2.1 berechnen wir nun das Produkt der beiden einmal mit Rechentrick und einmal ohne Rechentrick und prüfen, ob wir das gleiche Ergebnis erhalten.

$$\begin{aligned}
\text{ohne Trick: } & \overline{1a} \cdot \overline{1b} = (10 + a) \cdot (10 + b) = 100 + 10a + 10b + ab \\
\text{mit Trick: } & \overline{1a} + b = 10 + a + b && \text{(Schritt (i))} \\
& \to 10 \cdot (10 + a + b) && \text{(Schritt (ii))} \\
& \to 10 \cdot (10 + a + b) + ab = 100 + 10a + 10b + ab, && \text{(Schritt (iii))}
\end{aligned}$$

also ergeben die Rechnungen mit Trick und ohne Trick das gleiche Ergebnis. Damit ist die Richtigkeit des Verfahrens bewiesen. □

2.2 Der Kleine Gauß

Johann Carl Friedrich Gauß war ein überragender deutscher Mathematiker, von dem folgende Geschichte überliefert ist:

> Als Gauß neun Jahre alt war, bekam seine Schulklasse vom Lehrer die Aufgabe gestellt, die Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Die Schüler sollten das Ergebnis auf eine Tafel schreiben und vor sich ablegen, sobald sie das Ergebnis berechnet hatten. Kaum war die Aufgabe ausgesprochen, hatte Gauß bereits die Tafel vor sich abgelegt – mit dem richtig aufgeschriebenen Ergebnis.

Die einzelnen Additionen nacheinander auszuführen, dauert sehr lange. Gauß erkannte, dass er die Summanden geschickt umsortieren kann, um die Summe leichten zu berechnen:

$$\begin{aligned}&1+2+3+\cdots+98+99+100\\&=(1+100)+(2+99)+(3+98)+\cdots+(49+52)+(50+51).\end{aligned}$$

Diese Summe besteht aus 50 Summanden, wobei jeder Summand den Wert 101 hat. Der Wert der gesamten Summe ergibt sich also zu $50\cdot 101 = 5050$.

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung dieser Summenformel:

Satz 2.5 (Kleiner Gauß) Für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gilt die folgende Summenformel:

$$1+2+\cdots+(n-1)+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Beweis. Falls n gerade ist, sortieren wir die Summe um und erhalten:

$$\begin{aligned}&1+2+\cdots+(n-1)+n\\&=(1+n)+(2+(n-1))+\cdots+\left(\frac{n}{2}+\left(\frac{n}{2}+1\right)\right),\end{aligned}$$

dies sind $\frac{n}{2}$ Summanden, wobei jeder Summand den Wert $n+1$ hat. Der Wert der gesamten Summe ergibt sich also zu $\frac{n}{2}\cdot(n+1)$.

Falls n ungerade ist, so ist $(n-1)$ eine gerade Zahl. Für gerade Zahlen wurde die Behauptung schon bewiesen, d.h.

$$1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{(n-1)\cdot n}{2}.$$

Addieren wir nun auf beiden Seiten der Gleichung n, so erhalten wir

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)+n&=\frac{(n-1)\cdot n}{2}+n\\&=n\cdot\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\\&=n\cdot\left(\frac{n+1}{2}\right),\end{aligned}$$

also ist auch in diesem Fall die Behauptung gezeigt. □

2.3 Eine Teilbarkeitsregel

Ein übliches Problem in der Mathematik ist, die Primfaktorzerlegung einer gegebenen Zahl zu bestimmen. Das ist im Allgemeinen sehr schwer, was sich moderne Verschlüsselungsalgorithmen zu Nutze machen, wie zum Beispiel die RSA-Verschlüsselung. Für kleine Primzahlen gibt es allerdings leichte Tests, um zu prüfen, ob eine gegebene (unter Umständen sehr große) Zahl durch diese kleine Primzahl teilbar ist. Im Kapitel über Kongruenzen in der Zahlentheorie behandeln wir Teilbarkeitsregeln systematisch. Hier betrachten wir nur ein Beispiel, um zu üben, wie man eine Aussage über *beliebige* Zahlen durch Einführen von Variablen beweisen kann – ohne alle Möglichkeiten durchzuprobieren.

Im Folgenden nennen und beweisen wir eine Teilbarkeitsregel für die Teilbarkeit durch 3. Die Regel gilt für beliebig große Zahlen, aber um die Notation einfach zu halten, beweisen wir die Teilbarkeitsregel an dieser Stelle nur für dreistellige Zahlen.

Satz 2.6 (Teilbarkeit durch 3) Eine dreistellige Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist. (Die Quersumme einer Zahl ist die Summe ihrer Ziffern)

Beweis. Es sei $\overline{abc}$ eine beliebige dreistellige Zahl. Im Satz steht die Formulierung *genau dann …, wenn*. Wir müssen also zwei Dinge zeigen:

1. Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist, dann ist ihre Quersumme durch 3 teilbar.
2. Wenn die Quersumme einer Zahl durch 3 teilbar ist, dann ist auch die Zahl selbst durch 3 teilbar.

In diesem Satz ist der Beweis beider Richtungen sehr ähnlich. In späteren Sätzen wird das aber nicht mehr der Fall sein. Daher beginnen wir schon jetzt damit, die beiden Richtungen getrennt zu beweisen, obwohl das in diesem Fall etwas unnötig kompliziert ist.

1. Wir schreiben $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ und zerlegen die Zahl:

$$\underbrace{100a + 10b + c}_{A} = \underbrace{99a + 9b}_{B} + \underbrace{(a + b + c)}_{C}. \tag{2.1}$$

   Wir bemerken nun: Nach Voraussetzung ist A durch 3 teilbar. B ist ein Vielfaches von 3, also auch durch 3 teilbar. Folglich muss auch C durch 3 teilbar sein (weil ja $C = A - B$).

   C ist die Quersumme der Ausgangszahl, daher beweist das die erste Behauptung.

2. Wir betrachten die gleiche Zerlegung wie in Gleichung 2.1 angegeben. In diesem Fall sehen wir wieder, dass B durch 3 teilbar ist, weil es ein Vielfaches von 3 ist. Außerdem ist jetzt nach Voraussetzung auch die Quersumme C durch 3 teilbar. Folglich muss auch die Summe von B und C durch 3 teilbar sein. Das beweist die Behauptung. □

2.4 Aufgaben

2.1. Im Satz 2.1 wird davon ausgegangen, dass die Differenz zweier Zahlen 2 beträgt. Gilt die folgende Verallgemeinerung des Satzes?

> Wenn die Differenz zweier Zahlen x beträgt, dann ist das Produkt dieser beiden Zahlen gleich dem Quadrat der Zahl, die in der Mitte der beiden Zahlen liegt, minus $\frac{x}{2}$.

Falls die neue Aussage gilt, gib einen Beweis an. Falls die Aussage nicht gilt, gib ein Gegenbeispiel an.

2.2. Das Verfahren 2.2 wurde für zwei Zahlen zwischen 10 und 19 (einschließlich 10 und 19) erklärt. Funktioniert das gleiche Verfahren auch für Zahlen zwischen 20 und 29 (einschließlich 20 und 29)? Falls ja, gib einen Beweis an. Falls nein, gib ein Gegenbeispiel an.

2.3. Auf folgende Weise kann man leicht das Quadrat einer zweistelligen Zahl berechnen, die auf 5 endet (am Beispiel 35 erklärt): Multipliziere die erste Ziffer mit dem um eins Vergrößerten der ersten Ziffer ($3 \cdot (3 + 1) = 12$). Hänge an das Ergebnis zwei Nullen an und addiere 25 ($12 \to 1200 \to 1225$). Das Ergebnis ist die gesuchte Quadratzahl ($35 \cdot 35 = 1225$).

(a) Beweise, dass dieser Rechentrick für alle zweistelligen Zahlen funktioniert.

(b) Kann man einen Rechentrick für Zahlen, die auf 4 enden, erhalten, indem man im letzten Schritt nicht 25, sondern 16 addiert?

Falls der neue Rechentrick stimmt, beweise ihn für alle zweistelligen Zahlen. Falls er nicht immer stimmt, gib eine Beispielzahl an, für die der Rechentrick nicht stimmt.

2.4. Finde eine Formel für die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen und beweise sie.

(a) Gib einen Beweis durch Umsortierung an.

(b) Arbeite folgende, alternative Beweisidee aus: Eine Formel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen wurde in Satz 2.5 gegeben. Daraus erhält man eine Formel für die Summe der ersten n *geraden* Zahlen, also eine Formel für die Summe $2 + 4 + 6 + \cdots + (2n - 2) + 2n$. Subtrahiert man von den ersten $2n$ natürlichen Zahlen die ersten n geraden Zahlen, so bleiben die ersten n ungeraden Zahlen übrig.

2.5. Beweise: Eine dreistellige Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

2.6. Kann man die Teilbarkeitsregeln für Teilbarkeit 3 und 9 auch auf 27 verallgemeinern? Das heißt:

1. Wenn eine Zahl durch 27 teilbar ist, dann ist auch ihre Quersumme durch 27 teilbar.
2. Wenn die Quersumme einer Zahl durch 27 teilbar ist, dann ist auch die Zahl selbst durch 27 teilbar.

Prüfe für beiden Aussagen einzeln, ob sie gelten oder nicht. Falls eine Aussage gilt, gib einen Beweis an. Falls eine Aussage nicht gilt, gibt ein Gegenbeispiel an.

2.7.* *Vortragsthema: Carl Friedrich Gauß.* Gauß war ein überragender Mathematiker im 19. Jahrhundert. Neben seinem Lebenslauf soll eine interessante mathematische Erkenntnis im Zusammenhang mit ihm vorgestellt werden, als Beispiel bietet sich zum Beispiel die Konstruierbarkeit regelmäßiger n-Ecke oder eine Betrachtung von Beispielfällen von Kettenbrüchen.

3. Ebene Geometrie

Der Inhalt des ersten Kapitels wird im Schulunterricht behandelt. Es wird daher im Allgemeinen nicht nötig sein, die Inhalte mit Beweis zu wiederholen. In den folgenden Abschnitten werden allerdings diese Ergebnisse benutzt, daher stellen wir sie der Vollständigkeit halber an dieser Stelle zusammen.

3.1 Voraussetzungen aus dem Schulunterricht

3.1.1 Grundlegende Eigenschaften von Winkeln

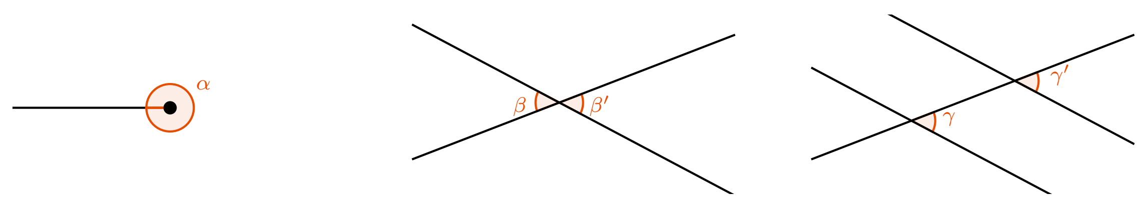
Folgende Eigenschaften von Winkeln nehmen wir ohne Beweis an:

Satz 3.1 (a) Ein Vollwinkel hat 360°.

(b) Scheitelwinkel an zwei sich schneidenden Geraden haben die gleiche Größe.

(c) Stufenwinkel an geschnittenen parallelen Geraden haben die gleiche Größe.

Beispiele für die beschriebenen Winkel sind in Abbildung 3.1 gegeben.



Vollwinkel: $\alpha = 360°$ Scheitelwinkel: $\beta = \beta'$ Stufenwinkel: $\gamma = \gamma'$

Abbildung 3.1: Bezeichnungen für einige Winkelbeziehungen

Daraus können wir die folgenden weiteren grundlegenden Eigenschaften von Winkeln ableiten:

Satz 3.2 (a) Zwei Nebenwinkel ergänzen sich zu 180°.

(b) Wechselwinkel an geschnittenen parallelen Geraden haben die gleiche Größe.

Beispiele für die beschriebenen Winkel sind in Abbildung 3.2 gezeigt.

Beweis. (a) Es seien die Bezeichnungen wie oben in der Skizze. Wir wollen also zeigen, dass $\beta + \delta = 180°$.

Nebenwinkel: $\beta + \delta = 180°$ Wechselwinkel: $\gamma = \epsilon$

Abbildung 3.2: Bezeichnungen für einige weitere Winkelbeziehungen

Die Winkel β und β', bzw. δ und δ' sind Nebenwinkel, also $\beta = \beta'$, sowie $\delta = \delta'$. Außerdem haben wir

$$\begin{aligned} & \beta + \delta + \beta' + \delta' = 360° \\ \Rightarrow \quad & 2\beta + 2\delta = 360° \\ \Rightarrow \quad & \beta + \delta = 180°, \end{aligned}$$

wobei wir im ersten Schritt $\beta = \beta'$ und $\delta = \delta'$ in die Gleichung eingesetzt haben.

(b) Mit den Bezeichnungen aus der Skizze gilt $\gamma = \gamma'$, weil die beiden Stufenwinkel sind. Außerdem gilt $\epsilon = \gamma'$, weil sie Nebenwinkel sind. Folglich ist $\epsilon = \gamma' = \gamma$, und das war zu zeigen. □

3.1.2 Die klassischen Kongruenzsätze ebener Dreiecke

Definition 3.3 Zwei Figuren heißen *kongruent*, falls sie durch Drehung, Translation und Spiegelung ineinander überführt werden können.

Satz 3.4 (Kongruenzsätze) (a) (“SSS”) Ein Dreieck ist durch die Angabe von drei Seitenlängen a, b, c bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt, falls es existiert.

Ein Dreieck mit diesen Angaben existiert genau dann, wenn a, b und c die *Dreiecksungleichung* erfüllen. Das heißt $a + b < c$ und $a + c < b$ und $b + c < a$.

(b) (“SWS”) Ein Dreieck ist durch die Angabe von zwei Seitenlängen und des eingeschlossenen Winkels bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt, falls es existiert.

Ein Dreieck mit diesen Angaben existiert genau dann, wenn der Winkel zwischen 0° und 180° groß ist.

(c) (“WSW”) Ein Dreieck ist durch die Angabe einer Seitenlänge und der zwei anliegenden Winkel bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt, falls es existiert.

Ein Dreieck mit diesen Angaben existiert genau dann, wenn die Summe der Winkel zwischen 0° und 180° beträgt.

(d) (“SWW”) Ein Dreieck ist durch die Angabe einer Seitenlänge und der Angabe des gegenüberliegenden Winkels sowie eines an der Seite anliegenden Winkels bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt, falls es existiert.

Ein Dreieck mit diesen Angaben existiert genau dann, wenn die Summe der Winkel zwischen 0° und 180° beträgt.

(e) (“SSWg”) Ein Dreieck ist durch die Angabe zweier Seitenlängen und des Winkels, welcher der längeren der beiden Seiten gegenüberliegt, bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt, falls es existiert.

Ein Dreieck mit diesen Angaben existiert genau dann, wenn der Winkel zwischen 0° und 180° groß ist.

Beweis. Wir beweisen den Teil (a), die anderen Teile bleiben als Übungsaufgabe.

(a) *Konstruktion:*

(1) Zeichne eine Strecke mit Länge a und bezeichne die Endpunkte mit B und C.

(2) Schlage Kreise um B mit Radius b und C mit Radius c.

(3) Es sei A einer der Schnittpunkte der beiden Kreise. ΔABC ist dann das gesuchte Dreieck.

Determination: Falls wir in Schritt (1) die Strecke $\overline{BC}$ an einem anderen Ort in der Zeichenebene zeichnen, so können die beiden Strecken durch Drehung, Translation und Spiegelung ineinander überführt werden.

Falls die Ungleichungen $a + b < c$ und $a + c < b$ und $b + c < a$ gelten, so haben die beiden Kreise aus Schritt (2) genau zwei Schnittpunkte A_1 und A_2. Die Dreiecke ΔA_1BC und ΔA_2BC sind kongruent (gespiegelt an BC). In diesem Fall existiert also ein bis auf Kongruenz eindeutiges Dreieck mit den geforderten Seitenlängen.

Falls eine der Ungleichungen nicht gilt, so haben die Kreise aus Schritt (2) entweder einen gemeinsamen Punkt, der auf der Gerade BC liegt, oder keinen gemeinsamen Punkt. In beiden Fällen kann also kein Dreieck mit den geforderten Seitenlängen existieren. (Bemerke, dass wir den entarteten Fall, in dem drei Punkte auf einer geraden liegen, nicht als Dreieck bezeichnen. Man könnte hier auch eine andere Konvention wählen.) □

3.2 Winkelsätze

Satz 3.5 (Innenwinkelsumme im Dreieck) In jedem Dreieck beträgt die Winkelsumme 180°.

Beweis. Es sei also ΔABC irgendein beliebiges Dreieck. Wir wollen nun zeigen, dass die Winkelsumme in ΔABC gerade 180° beträgt. Dazu betrachten wir eine Parallele zu Dreiecksseite $\overline{AB}$ durch den Punkt C, in Abbildung 3.3 ist diese in Orange eingezeichnet.

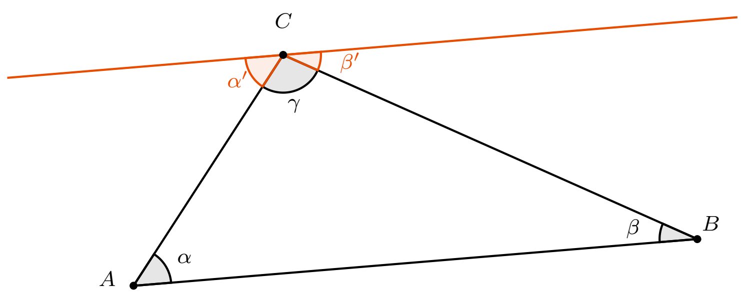


Abbildung 3.3: Eine Hilfslinie für den Beweis von Satz 3.5

An dieser Stelle sehen wir:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha' && \text{(Wechselwinkel)} \\ \beta &= \beta' && \text{(Wechselwinkel)} \\ \alpha' + \beta' + \gamma &= 180° && \text{(Denn } (\alpha' + \gamma) \text{ und } \beta' \text{ sind Nebenwinkel)} \end{aligned}$$

In der unteren Gleichung können wir also α' durch α und β' mit β ersetzen, weil die Winkel ja jeweils gleich groß sind. Also erhalten wir:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Dabei war das Ausgangsdreieck ΔABC beliebig. Also ist die Innenwinkelsumme in jedem Dreieck 180°. □

Satz 3.6 (Innenwinkelsumme im n-Eck) In einem (nicht-überschlagenen) n-Eck beträgt die Innenwinkelsumme $(n-2) \cdot 180°$.

Beweis. Der Beweis bleibt als Übungsaufgabe. □

Satz 3.7 (Außenwinkelsatz) Gegeben sei ein Dreieck ΔABC mit Innenwinkeln α, β und γ. Der Nebenwinkel von α heißt *Außenwinkel von* α. Es gilt: Der Außenwinkel von α ist gleich der Summe von β und γ.

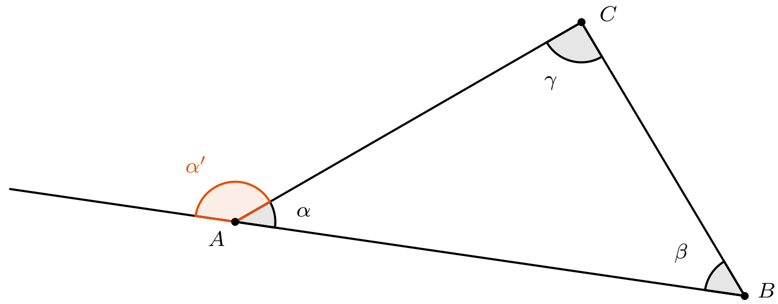


Abbildung 3.4: Eine Skizze für den Beweis von Satz 3.7

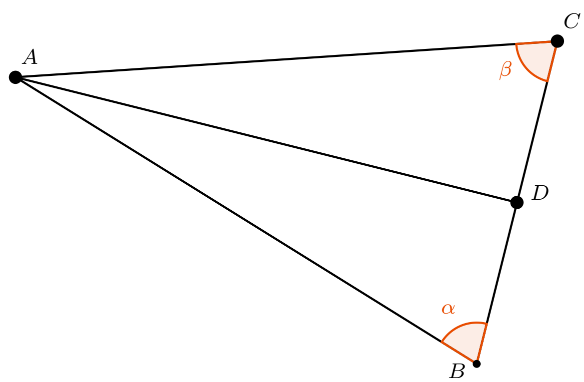


Abbildung 3.5: Ein gleichschenkliges Dreieck.

Beweis. Es sei also ΔABC beliebiges Dreieck. Außerdem sei α' der Außenwinkel zu α, wie in Abbildung 3.4 gezeigt.

Dann gilt:

$$180^\circ = \alpha + \alpha' \qquad \text{(Nebenwinkel)}$$
$$180^\circ = \alpha + \beta + \gamma \qquad \text{(wegen Innenwinkelsumme, Satz 3.5)}$$

Nehmen wir beide Gleichungen zusammen, so erhalten wir:

$$\alpha + \alpha' = \alpha + \beta + \gamma$$

Und daraus erhalten wir $\alpha' = \beta + \gamma$. Und dies war gerade die Behauptung. □

Definition 3.8 Ein Dreieck heißt *gleichschenklig*, wenn zwei seiner Seiten die gleiche Länge haben. Die beiden Winkel, die nicht durch die gleich langen Schenkel eingeschlossen werden, heißen *Basiswinkel*.

In Abbildung 3.5 ist ein gleichschenkliges Dreieck dargestellt, wobei die beiden Basiswinkel β und γ farblich hervorgehoben sind.

Satz 3.9 In einem gleichschenkligen Dreieck haben Basiswinkel die gleiche Größe.

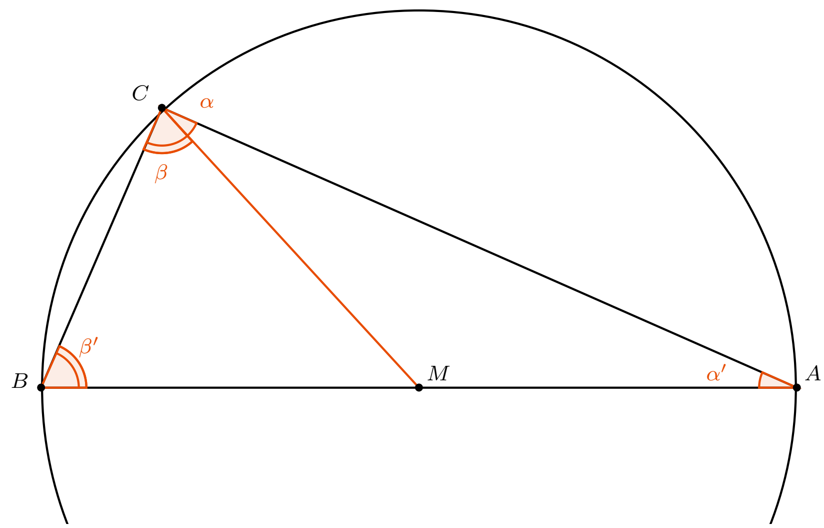


Abbildung 3.6: Skizze zum Beweis von Satz 3.10

Beweis. Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck ΔABC, wobei $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ die gleiche Länge haben sollen. Es sei D der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$. Dann sind die Dreiecke ΔADC und ΔABC kongruent nach dem Kongruenzsatz "SSWg", folglich haben die Winkel α und β die gleiche Größe. □

Satz 3.10 (Satz des Thales) Gegeben sei ein Kreis k und ein Durchmesser $\overline{AB}$ des Kreises. (Also eine Strecke, deren Endpunkte auf der Kreislinie liegen und die durch den Mittelpunkt verläuft) Für einen beliebigen Punkt C auf k, der verschieden von A und B ist, hat dann das Dreieck ΔABC einen rechten Winkel bei C.

Beweis. Es sei (wie in Abbildung 3.6 dargestellt) M der Mittelpunkt des Kreises. Weil alle drei Eckpunkte A, B und C auf dem Kreis liegen, haben die Strecken $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ die gleiche Länge. Also sind die Dreiecke ΔMAC und ΔMCB gleichschenklig.

Für die eingezeichneten Winkel gilt also: $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck).

Außerdem gilt für Innenwinkelsumme im Dreieck ΔABC:

$$180^\circ = \alpha' + \beta' + (\alpha + \beta)$$

Und wenn wir in dieser Gleichung $\alpha' = \alpha$ und $\beta' = \beta$ einsetzen, so erhalten wir:

$$180^\circ = 2\alpha + 2\beta$$

Und wenn wir beide Seiten der Gleichung durch 2 teilen:

$$90^\circ = \alpha + \beta$$

Also hat ΔABC bei C tatsächlich einen rechten Winkel. Dies war gerade die Behauptung. □

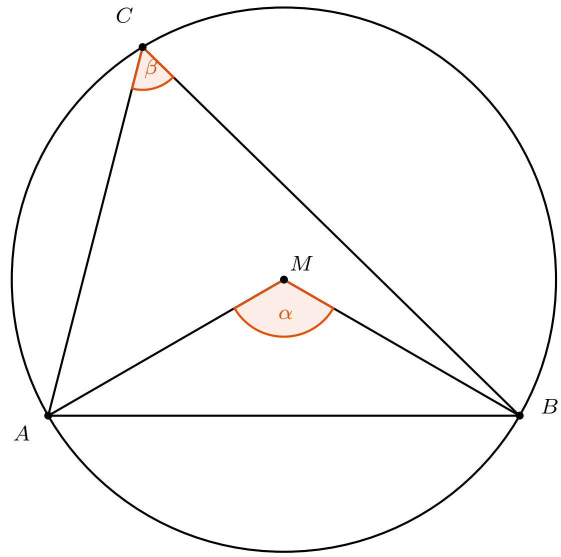


Abbildung 3.7: Veranschaulichung der Aussage von Satz 3.12

Satz 3.11 (Umkehrung vom Satz des Thales) Gegeben sei ein Kreis k und ein Durchmesser $\overline{AB}$ des Kreises. Sei C ein Punkt außerhalb der Gerade AB. Dann gilt: Wenn das Dreieck ΔABC einen rechten Winkel bei C hat, so liegt C auf k.

Beweis. Wir beweisen die *Kontraposition* der Aussage, das heißt: *Wenn C nicht auf k liegt, dann hat ΔABC keinen rechten Winkel bei C.* Sei dazu also C ein Punkt, der nicht auf k liegt. Wir bezeichnen mit M der Mittelpunkt des Kreises k.

Angenommen, C liegt außerhalb der Kreisfläche. Sei C' der Schnittpunkt der Strecke $\overline{MC}$ mit k. Dann gilt nach dem Satz des Thales 3.10, dass ΔABC einen rechten Winkel bei C hat. Es gilt $\angle BCA < \angle BC'A$ □

Satz 3.12 (Zentri-Peripheriewinkelsatz) Gegeben sei ein Kreis k mit Mittelpunkt M und eine Kreissehne $\overline{AB}$ (d.h. eine Strecke, deren Endpunkte auf der Kreislinie liegen). Weiter sei C ein Punkt auf k, der auf der gleichen Seite von AB liegt wie M. Dann gilt: Der Mittelpunktswinkel (oder Zentriwinkel) $\angle AMB$ ist doppelt so groß wie der Umfangswinkel $\angle ACB$.

In Abbildung 3.7 ist die Aussage veranschaulicht: α ist der Zentriwinkel über $\overline{AB}$ und β ein Peripheriewinkel über $\overline{AB}$. Nach Aussage des Satzes gilt $\alpha = 2\beta$.

Beweis. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. M liegt im Dreieck ΔABC.
2. M liegt nicht im Dreieck ΔABC.

Zu 1.: Wir betrachten als Hilfslinie die Strecke $\overline{CM}$. Weiter bezeichnen γ, γ', γ'', δ, δ', δ'' die in Abbildung 3.8 markierten Winkel:

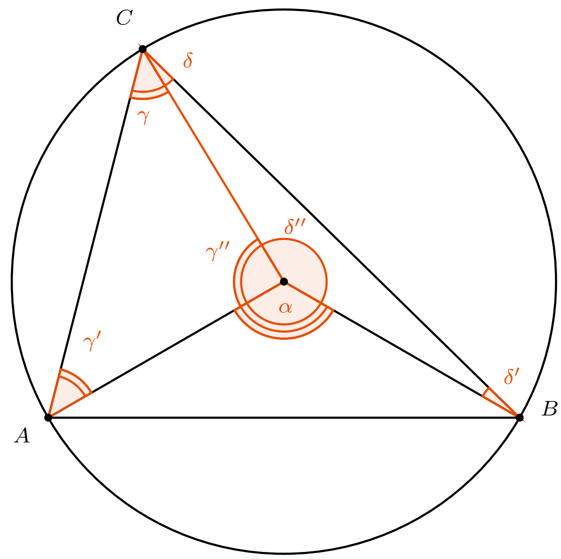


Abbildung 3.8: Skizze zum Beweis von Satz 3.12

Unser Ziel ist also, zu zeigen, dass $\alpha = 2 \cdot (\gamma + \delta)$.

Zunächst stellen wir fest: Die Dreiecke ΔAMC und ΔCMB sind gleichschenklig. Also gilt: $\gamma = \gamma'$ und $\delta = \delta'$. Außerdem gilt für die Innenwinkelsumme in den beiden Dreiecken:

$$\begin{aligned} 180° &= \gamma + \gamma' + \gamma'' \\ 180° &= \delta + \delta' + \delta'' \end{aligned}$$

Und wenn wir $\gamma = \gamma'$ und $\delta = \delta'$ einsetzen:

$$\begin{aligned} 180° &= 2\gamma + \gamma'' \\ 180° &= 2\delta + \delta'' \end{aligned}$$

Wir können nun in der ersten Gleichung auf beiden Seiten γ'' subtrahieren und in der zweiten Gleichung auf beiden Seiten Δ'' subtrahieren. Wir erhalten damit:

$$\begin{aligned} 180° - \gamma'' &= 2\gamma \\ 180° - \delta'' &= 2\delta \end{aligned}$$

Wenn wir nun beide Gleichungen addieren, so erhalten wir:

$$360° - \gamma'' - \delta'' = 2\gamma + 2\delta$$

Wir wissen: α, γ'' und δ'' ergänzen sich zu $360°$. Also ist: $360° - \gamma'' - \delta'' = \alpha$. Wenn wir dies in unsere letzte erhaltene Gleichung einsetzen, so bekommen wir:

$$\alpha = 2\gamma + 2\delta$$

Und dies ist genau die Behauptung, die wir beweisen wollten.

Der Fall 2. bleibt als Übungsaufgabe. □

3.3 Besondere Punkte im Dreieck

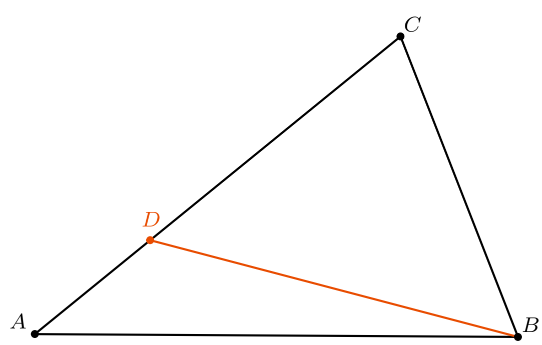
In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit ausgezeichneten Punkten im Dreieck. So ist es zum Beispiel interessant, den *Mittelpunkt* eines Dreiecks zu betrachten. Dabei ist natürlich die Frage, was dieser Mittelpunkt genau sein soll. Es gibt mehrere sehr wichtige Punkte, die in der Mitte des Dreiecks liegen und alle den Namen Mittelpunkt verdient hätten. Diese Punkte werden wir nun kennenlernen.

3.3.1 Charakterisierung besonderer Geraden

Satz 3.13 In einem Dreieck liegt der größte Winkel der größten Seite gegenüber.

Beweis. Sei ΔABC ein Dreieck mit $\left|\left|\overline{AC}\right|\right| > \left|\overline{BC}\right|$.

Wir wollen zeigen, dass dann $\angle ABC > \angle CAB$ ist. Sei dazu D ein Punkt auf der Seite $\overline{AC}$, sodass $\left|\overline{CD}\right| = \left|\overline{BC}\right|$, wie in der Skizze:



Nach Satz 3.9 haben wir $\angle CDB = \angle CBD$. $\angle CBD$ ist ein Teil von $\angle CBA$, also $\angle CBD < \angle CBA$.

Die größere der beiden Seiten liegt also dem größeren Winkel gegenüber. Vergleicht man nun noch mit $\overline{AB}$, so erhält man die Behauptung. □

Satz 3.14 (Charakterisierung besonderer Geraden) (a) Das Lot von einem Punkt auf eine Gerade ist die kürzeste Verbindung zwischen diesem Punkt und der Geraden.

(b) Gegeben seien zwei Geraden g und h, die einen Winkel α einschließen. Die Winkelhalbierende des Winkels α ist die Menge aller Punkte, die den gleichen Abstand von den Schenkeln g und h haben.

Anders ausgedrückt: Wenn ein Punkt auf der Winkelhalbierende von α liegt, dann hat er den gleichen Abstand von g und h. Und wenn ein Punkt den gleichen Abstand von g und h hat, dann liegt der Punkt auf der Winkelhalbierenden von α.

(c) Die Mittelsenkrechte einer Strecke $\overline{AB}$ ist die Menge aller Punkte, die den gleichen Abstand von den Endpunkten A und B haben.

Anders ausgedrückt: Wenn ein Punkt auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ liegt, dann hat er den gleichen Abstand von A und B. Und wenn ein Punkt den gleichen Abstand von A und B hat, dann liegt der Punkt auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$.

Beweis. (a) Sei g eine Gerade und P ein Punkt außerhalb von g. Nach Definition ist das Lot von P auf g die eindeutig bestimmte Gerade, die durch P verläuft und senkrecht auf g steht. Sei F der Fußpunkt des Lotes von P auf g. Sei Q ein weiterer Punkt auf g.

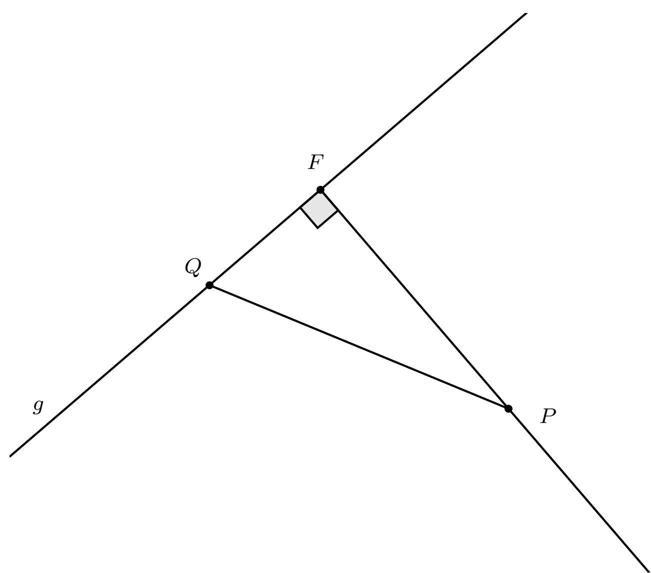


Abbildung 3.9: Skizze zum Beweis von Satz 3.14 (a)

Im Dreieck ΔPFQ ist der Winkel $\angle PFQ = 90°$ der größte vorhandene Winkel. Nach Satz 3.13 ist also auch $\overline{PQ}$ die längste Dreiecksseite, also gilt insbesondere $|\overline{PQ}| > |\overline{FP}|$.

(b) Sei ω die Winkelhalbierende des Winkels α, der von g und h eingeschlossen wird.

“$\Rightarrow$”: Sei P ein Punkt auf ω. Es seien G bzw. H die Fußpunkte der Lote von P auf g bzw. h.

Die beiden Dreiecke ΔGMP und ΔFMP haben die Seitenlänge $|\overline{MP}|$, den Winkel $\angle PFM = \angle PGM$ und den Winkel $\angle PMG = \angle PMF$ gemeinsam. Die Dreiecke sind also nach Satz

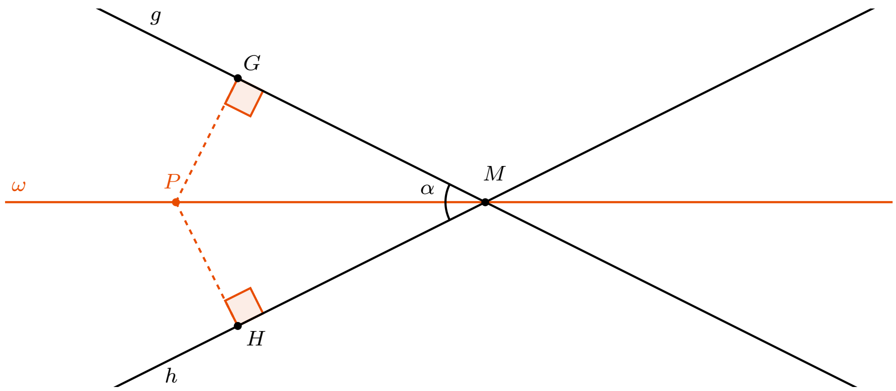


Abbildung 3.10: Skizze zum Beweis von Satz 3.14 (b)

3.4 kongruent. Folglich gilt auch $|\overline{FP}| = |\overline{GP}|$, und das war gerade die Behauptung.

"$\Leftarrow$": Sei andererseits P ein Punkt, der den gleichen Abstand zu g wie zu h hat. Seien wieder G und H die Lotfußpunkte von P auf g und h. Nach Voraussetzung gilt dann $|\overline{FP}| = |\overline{GP}|$. Außerdem gilt $\angle PFM = \angle PGM$ und die Dreiecke ΔFPM und ΔGPM haben die Seite $\overline{GM}$ gemeinsam. Folglich gilt wieder nach Satz 3.4, dass die Dreiecke ΔFPM und ΔGPM kongruent sind, also gilt insbesondere $\angle PMF = \angle PMG$, d.h. P liegt auf der Winkelhalbierenden des Winkels α.

(c) Der Beweis verläuft ähnlich wie Teil (b) und bleibt als Übungsaufgabe. □

3.3.2 Winkelhalbierende und Inkreis eines Dreiecks

Definition 3.15 Es sei ΔABC ein Dreieck. Ein Kreis, der jede Seite von ΔABC berührt, heißt *Inkreis* von ΔABC.

So ist zum Beispiel in Abbildung 3.11 ein Dreieck mit Inkreis dargestellt:

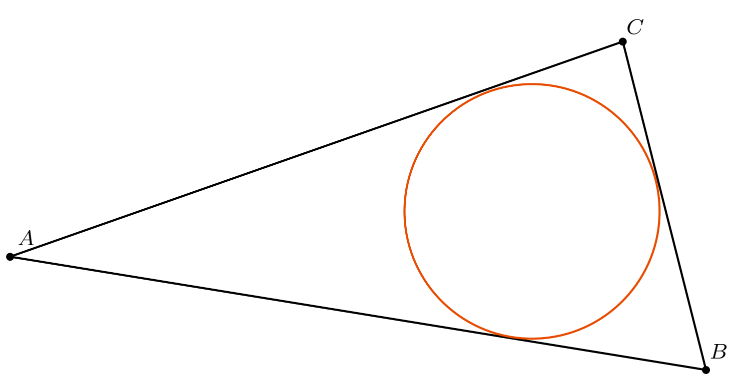
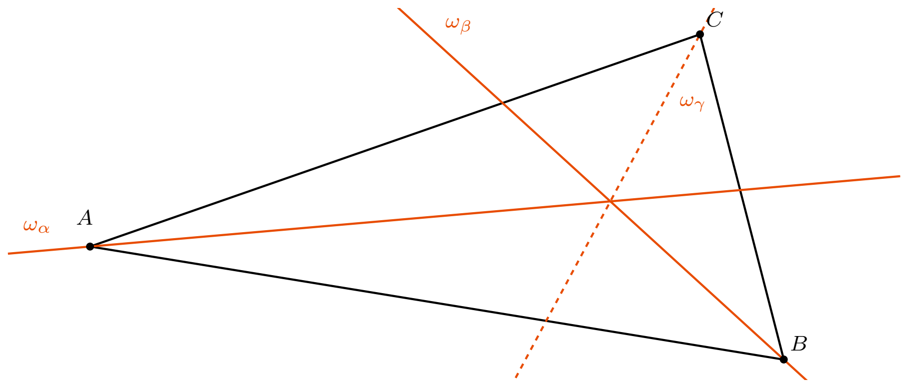


Abbildung 3.11: Ein Dreieck mit Inkreis.

Satz 3.16 (Satz über den Inkreis eines Dreiecks) In einem Dreieck schneiden sich alle drei Winkelhalbierenden in einem Punkt. Jedes Dreieck besitzt einen eindeutigen Inkreis und der Inkreismittelpunkt ist als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden gegeben.

Beweis. Sei ΔABC ein Dreieck mit Winkelhalbierenden ω_α, ω_β und ω_γ, wie eingezeichnet:



Wir zeigen zunächst, dass sich alle drei Winkelhalbierenden in einem Punkt schneiden. Sei dazu P der Schnittpunkt von ω_α und ω_β. Wir müssen zeigen, dass P auch auf ω_γ liegt. Nach Satz 3.14 wissen wir:

$$\begin{aligned} P \in \omega_\alpha : &\qquad \text{Abstand von } P \text{ und } \overline{AC} = \text{Abstand von } P \text{ und } \overline{AB}, \\ P \in \omega_\beta : &\qquad \text{Abstand von } P \text{ und } \overline{AB} = \text{Abstand von } P \text{ und } \overline{BC}. \end{aligned}$$

Schreiben wir beide Gleichungen zusammen auf, so erhalten wir

$$\text{Abstand von } P \text{ und } \overline{AC} = \text{Abstand von } P \text{ und } \overline{AB} = \text{Abstand von } P \text{ und } \overline{BC}.$$

Das heißt, P hat den gleichen Abstand von $\overline{AC}$ wie von $\overline{BC}$. Nach Satz 3.14 liegt P damit auch auf der Winkelhalbierenden ω_γ. Damit ist gezeigt, dass sich die drei Winkelhalbierenden in einem Punkt schneiden.

Dieser Punkt hat den gleichen Abstand von allen Dreiecksseiten. Ein Berührkreis an eine der Dreiecksseiten berührt also auch die anderen Dreiecksseiten und ist damit Inkreis. Damit ist die Existenz des Inkreises gezeigt und die Eindeutigkeit des Inkreises folgt aus der Eindeutigkeit von P. □

3.3.3 Ankreise eines Dreiecks

Definition 3.17 Ein Ankreis an ein Dreieck ist ein Kreis, der eine Seite sowie die Verlängerung der beiden anderen Seiten berührt.

In Abbildung 3.12 ist ein Dreieck mit seinen drei Ankreisen dargestellt.

Satz 3.18 (Satz über die Ankreise eines Dreiecks) In einem Dreieck schneiden sich die Halbierende eines Innenwinkels und die beiden Halbierenden der beiden anderen Außenwinkel in einem gemeinsamen Punkt. Jedes Dreieck besitzt drei eindeutige Ankreise und die Ankreismittelpunkte sind gegeben als Schnittpunkte der Winkelhalbierenden der Außenwinkel des Dreiecks.

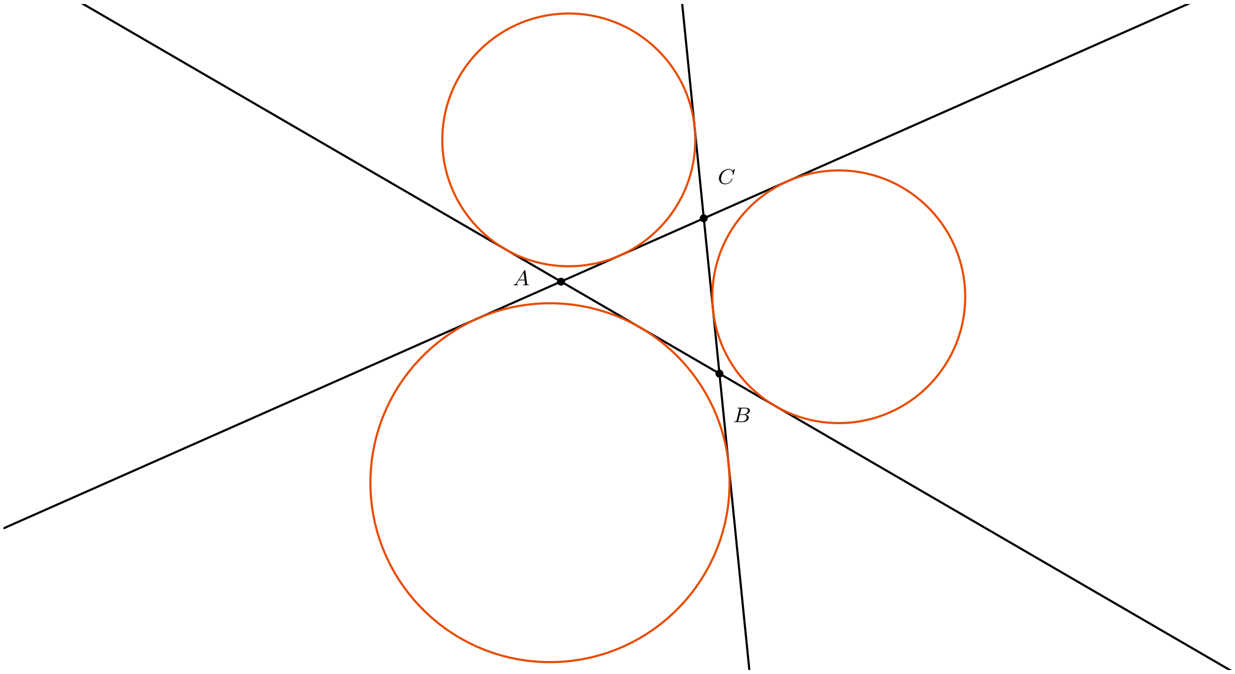


Abbildung 3.12: Ein Dreieck mit seinen drei Ankreisen.

Beweis. Der Beweis verläuft völlig analog zum Beweis des vorigen Satzes 3.16. □

3.3.4 Mittelsenkrechten und Umkreis eines Dreiecks

Definition 3.19 Es sei ΔABC ein Dreieck. Ein Kreis, der durch A, B und C verläuft, heißt *Umkreis* von ΔABC.

So ist zum Beispiel in Abbildung 3.13 ein Dreieck mit seinem Umkreis dargestellt.

Satz 3.20 (Satz über den Umkreis eines Dreiecks) In einem Dreieck schneiden sich die Mittelsenkrechten der drei Seiten in einem gemeinsamen Punkt. Jedes Dreieck besitzt einen eindeutigen Umkreis und der Umkreismittelpunkt ist als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden gegeben.

Beweis. Der Beweis ist ähnlich zum Beweis von Satz 3.16. In diesem Fall benutzt man die Charakterisierung der Mittelsenkrechten aus Satz 3.14. □

3.3.5 Höhen eines Dreiecks

Definition 3.21 Es sei ΔABC ein Dreieck. Die *Höhe auf die Seite* $\overline{BC}$ ist das Lot vom Eckpunkt vom Eckpunkt A auf die Gerade BC. (Möglicherweise liegt der Lotfußpunkt nicht auf der Strecke $\overline{BC}$, sondern nur auf ihrer Verlängerung)

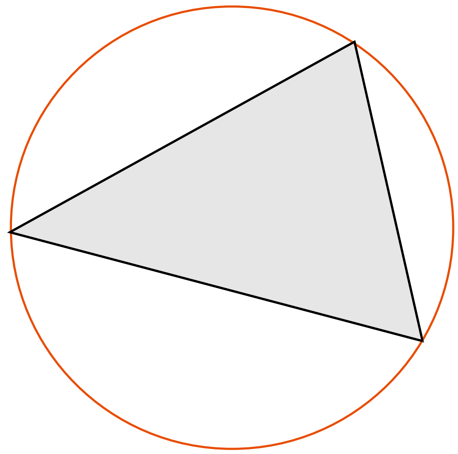


Abbildung 3.13: Ein Dreieck mit seinem Umkreis.

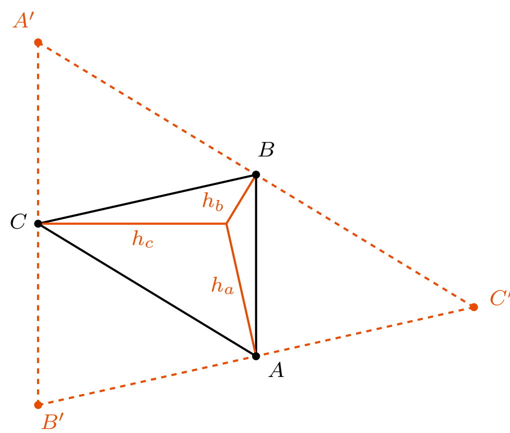


Abbildung 3.14: Skizze zum Beweis von Satz 3.22.

Satz 3.22 (Satz über die Höhen im Dreieck) In einem Dreieck schneiden sich die Höhen auf die drei Seiten in einem gemeinsamen Punkt.

Beweis. Sei ΔABC und h_a, h_b, h_c die Höhen auf die entsprechenden Dreiecksseiten, wie in Abbildung 3.14 gezeigt.

Als Hilfslinien zeichnen wir nun Parallelen zu jeder Dreiecksseite durch den gegenüberliegenden Eckpunkt. D.h. eine Parallele zu AB durch C, eine Parallele zu BC durch A und eine Parallele zu AC durch B. Es seien A', B' und C' die Schnittpunkte dieser neuen Geraden wie in der Skizze.

Dann gilt: $\Delta A'BC$ und ΔABC haben die Seite $\overline{BC}$ gemeinsam. Die Winkel $\angle BCA'$ und $\angle CBA$ sind Wechselwinkel, haben also die gleiche Größe. Analog $\angle CBA' = \angle ACB$. Folglich sind die Dreiecke nach Satz 3.4 (Kongruenzsatz “WSW”) kongruent.

Analog sehen wir, dass ΔABC und $\Delta AB'C$ kongruent sind. Folglich sind auch $\Delta A'BC$ und

$\Delta AB'C$ kongruent, also gilt $|\overline{B'C}| = |\overline{A'C}|$, d.h. C ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{A'B'}$.

Analog folgern wir, dass B der Mittelpunkt der Strecke $\overline{A'C'}$ ist und dass A der Mittelpunkt der Strecke $\overline{B'C'}$ ist. Folglich sind die Geraden h_a, h_b und h_c gerade die Mittelsenkrechten des Dreiecks $\Delta A'B'C'$. Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich nach Satz 3.20 in einem gemeinsamen Punkt, was die Behauptung beweist. □

3.3.6 Seitenhalbierende eines Dreiecks

Die letzten der üblichen besonderen Linien im Dreieck sind die Seitenhalbierenden (d.h. die Strecken von einem Eckpunkt zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite). In Abbildung 3.15 ist links ein Dreieck mit seinen Seitenhalbierenden und seinem Schwerpunkt abgebildet.

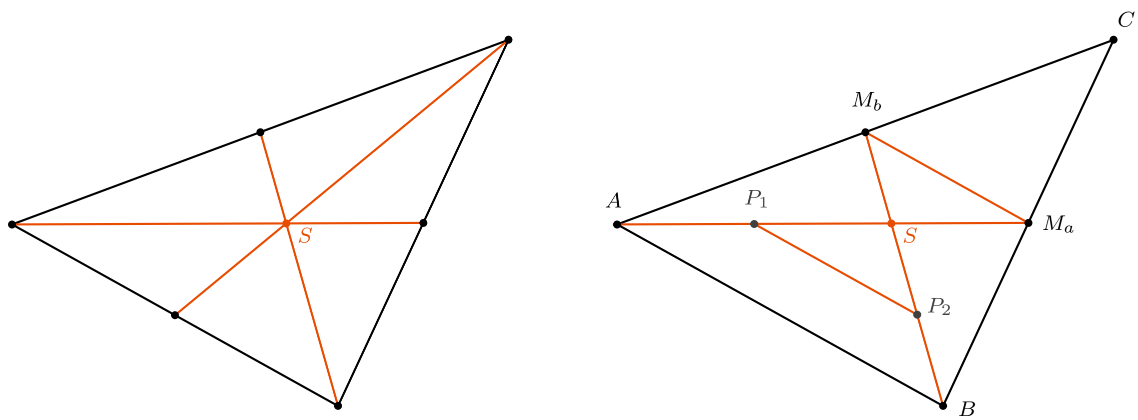


Abbildung 3.15: Links: Dreieck mit seinen Seitenhalbierenden. Rechts: Skizze zum Beweis von Satz 3.23.

Satz 3.23 (Satz über die Seitenhalbierenden im Dreieck)

(a) In einem Dreieck teilt eine jede Seitenhalbierende jede andere in zwei Strecken, deren Längen im Verhältnis 2:1 stehen.

(b) In einem Dreieck schneiden sich die drei Seitenhalbierenden in einem gemeinsamen Punkt, dieser heißt *Schwerpunkt des Dreiecks*.

Beweis.

(a) Gegeben sei ein Dreieck ΔABC. Seien M_a und M_b die Mittelpunkte der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$, wie in der Skizze oben rechts. Dann ist $\overline{AM_a}$ die Halbierende der Seite $\overline{BC}$ und $\overline{BM_b}$ die Halbierende der Seite $\overline{AC}$. Sei S der Schnittpunkt der beiden Seitenhalbierenden. Seien P_1 und P_2 die Mittelpunkte der Strecken $\overline{AS}$ bzw. $\overline{BS}$.

Im Satz 3.45 wird gezeigt, dass $P_1P_2 \| AB$ und $M_aM_b \parallel AB$, d.h. es gilt auch $P_1P_2 \parallel M_aM_b$. Folglich sind $\angle SP_2P_1 = \angle SM_bM_a$ und $\angle P_2P_1S = \angle M_bM_aS$, weil sie jeweils Wechselwinkel sind. Ebenfalls nach Satz 3.45 gilt $|\overline{P_1P_2}| = |\overline{M_aM_b}|$, folglich gilt nach dem Kongruenzsatz "WSW": $\Delta P_1P_2S \simeq M_aM_bS$.

Das heißt insbesondere:

$$\begin{aligned}
\left|\overline{AS}\right| &= \left|\overline{AP_1}\right| + \left|\overline{P_1S}\right| \\
&= 2\left|\overline{P_1S}\right| && \text{(Weil } P_1 \text{ Mittelpunkt von } \overline{AS}\text{)} \\
&= 2\left|\overline{M_aS}\right|
\end{aligned}$$

und das zeigt die Behauptung.

(b) Seien s_a, s_b und s_c die drei Seitenhalbierenden des Dreiecks ΔABC. Sei S der Schnittpunkt von s_a und s_b und $\tilde{S}$ der Schnittpunkt von s_a und s_c. Nach Teil (a) gilt: S und $\tilde{S}$ teilen beide s_a im Verhältnis 2:1, folglich gilt $S = \tilde{S}$. □

3.4 Das Haus der Vierecke

3.4.1 Das Trapez

Definition 3.24 Ein Viereck, in dem (mindestens) ein Paar gegenüberliegender Seiten parallel ist, heißt Trapez.

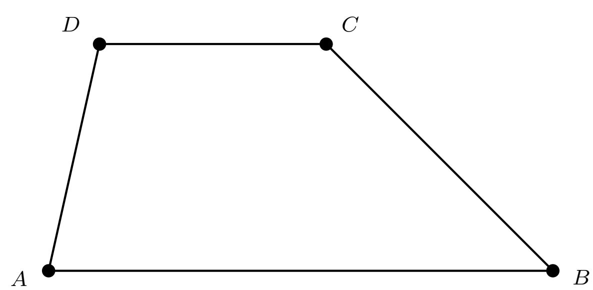


Abbildung 3.16: Beispiel für ein Trapez.

In Abbildung 3.16 sind die beiden Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ parallel. Über die Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ ist zunächst nichts bekannt. Insbesondere wird im Allgemeinen nicht verlangt, dass diese Seite die gleiche Länge haben.

Die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ heißen Basen, die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ heißen Schenkel.

Satz 3.25 (Charakterisierung des Trapezes) Für ein Viereck $ABCD$ sind die folgenden beiden Bedingungen äquivalent:

(a) Das Viereck ist ein Trapez, wobei die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ parallel sind.

(b) Es gilt $\angle BAD + \angle ADC = 180°$ und $\angle ABC + \angle BCD = 180°$.

Beweis. "(a) ⇒ (b)": Zeichne als Hilfslinie eine Strecke, die senkrecht auf AB und CD steht, wie in Abbildung 3.17 gezeigt.

Nach Satz 3.6 gilt:

$$\angle PAD + \angle ADQ + \angle DQP + \angle QPA = 360°.$$

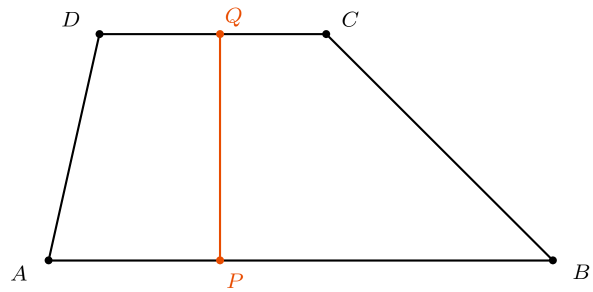


Abbildung 3.17: Skizze zum Beweis von Satz 3.25.

Weiterhin gilt $\angle DQP = \angle QPA = 90°$. Setzen wir dies in obige Gleichung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} & \angle PAD + \angle ADQ + 180° = 360° \\ \Rightarrow \quad & \angle PAD + \angle ADQ = 180°, \end{aligned}$$

d.h. $\angle BAD + \angle ADC = 180°$. Analog erhalten wir $\angle ABC + \angle BCD = 180°$.

"(b) $\Rightarrow$ (a)": Wähle P auf AB verschieden von A und B. Errichte die Senkrechte auf AB im Punkt P, diese schneide CD im Punkt Q. Wir wollen nun zeigen, dass die PQ auch senkrecht auf CD steht.

Dies folgt wieder aus Satz 3.6:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\angle PAD + \angle ADQ}_{=180°} + \angle DQP + \underbrace{\angle QPA}_{=90°} = 360° \\ \Rightarrow \quad & \angle DQP = 90°. \end{aligned}$$

□

Definition 3.26 Ein Viereck heißt *gleichwinkliges Trapez*, falls es ein Trapez ist und zusätzlich die Winkel, die an eine Basis anliegen, die gleiche Größe haben.

Hinweis: Oft wird eine solche Figur auch *gleichschenkliges Trapez* genannt. Dieser Name ist aber etwas ungünstig, weil aus der gleichen Länge der Schenkel noch keine Gleichheit der Basiswinkel folgt. (Man möchte mit der Definition den Fall des allgemeinen Parallelogramms ausschließen)

Satz 3.27 (Charakterisierung des gleichwinkligen Trapezes) Für ein Viereck $ABCD$ sind die folgenden beiden Bedingungen äquivalent:

(a) $ABCD$ ist ein gleichwinkliges Trapez.

(b) $ABCD$ ist ein Trapez und die Diagonalen von $ABCD$ haben die gleiche Länge.

Beweis. Der Beweis bleibt als Übungsaufgabe. □

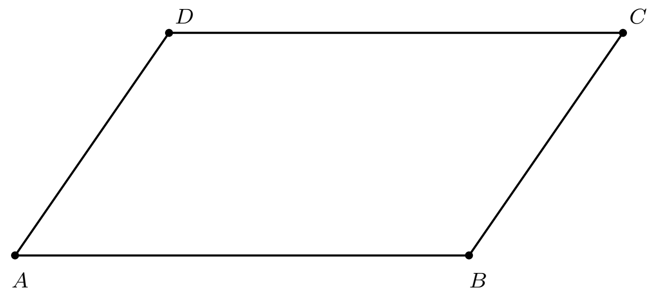


Abbildung 3.18: Beispiel für ein Parallelogramm.

3.4.2 Das Parallelogramm

Definition 3.28 Ein Viereck heißt *Parallelogramm*, falls gegenüberliegende Seiten parallel sind.

In Abbildung 3.18 sind $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, sowie $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ parallel zueinander, also ist $ABCD$ ein Parallelogramm.

Satz 3.29 (Charakterisierung des Parallelogramms) Für ein Viereck $ABCD$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

(b) In $ABCD$ ergänzen sich benachbarte Winkel zu $180°$.

(c) In $ABCD$ haben gegenüberliegende Seiten die gleiche Länge.

(d) In $ABCD$ haben gegenüberliegende Winkel die gleiche Größe.

(e) Die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ halbieren sich gegenseitig.

Beweis. Wir beweisen die Implikationen (a) $\Rightarrow$ (b), (b) $\Rightarrow$ (c), (c) $\Rightarrow$ (d), (d) $\Rightarrow$ (e), (e) $\Rightarrow$ (a). Damit ist dann gezeigt, dass alle Aussagen äquivalent sind.

“(a) $\Rightarrow$ (b)”: Sei α der Winkel bei A und β der Winkel bei B. Wir möchten zeigen, dass $\alpha + \beta = 180°$. Betrachte die Verlängerung von $\overline{AB}$ über B hinaus, wie in Abbildung 3.19 gezeichnet.

Mit den Bezeichnungen aus der Zeichnung gilt dann: α und α' sind Stufenwinkel, also $\alpha = \alpha'$. Außerdem $\beta + \alpha' = 180°$, weil sie Nebenwinkel sind. Setzen wir die erste Gleichung in die zweite ein, so erhalten wir $\alpha + \beta = 180°$.

Für die anderen Winkel folgt die Aussage analog.

“(b) $\Rightarrow$ (c)”: Betrachte als Hilfslinie die Diagonale $\overline{BD}$, wie in Abbildung 3.20 eingezeichnet:

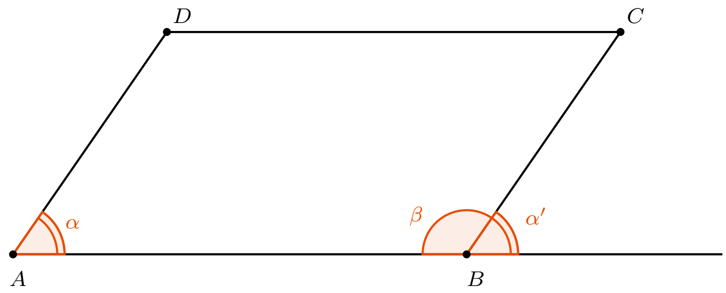


Abbildung 3.19: Skizze zum Beweis von Satz 3.29.

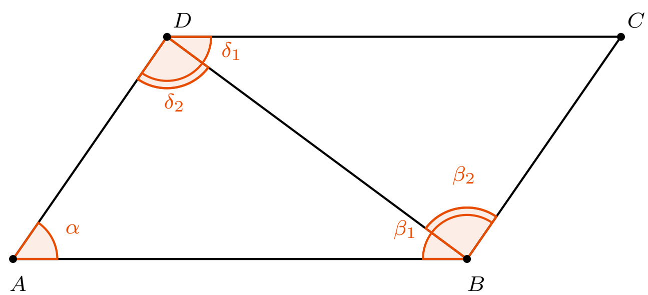


Abbildung 3.20: Weitere Skizze zum Beweis von Satz 3.29.

Wir haben dann mit den Bezeichnungen aus der Skizze:

$$\alpha + \beta_1 + \delta_2 = 180^\circ \qquad \text{(IWS in } \Delta ABD\text{)}, \tag{3.1}$$
$$\alpha + \beta_1 + \beta_2 = 180^\circ \qquad \text{(Voraussetzung)}, \tag{3.2}$$
$$\alpha + \delta_1 + \delta_2 = 180^\circ \qquad \text{(Voraussetzung)}. \tag{3.3}$$

Setzen wir die Gleichungen 3.1 und 3.2 gleich, so erhalten wir die Gleichung $\beta_2 = \delta_2$. Setzen wir die Gleichungen 3.1 und 3.3 gleich, so erhalten wir die Gleichung $\beta_1 = \delta_1$. Die Dreiecke ΔABD und ΔBCD sind dann nach dem Kongruenzsatz "WSW" kongruent (siehe Satz 3.4).

Die Implikationen (c) ⇒ (d), (d) ⇒ (e) und (e) ⇒ (a) bleiben als Übungsaufgaben. □

3.4.3 Das Drachenviereck

Definition 3.30 Ein Viereck heißt *Drachenviereck*, falls es zwei Paare benachbarter Seiten gibt, die die gleiche Länge haben.

In Abbildung 3.21 sind zwei Drachenvierecke abgebildet. Links ein konvexes (die Diagonalen haben einen Schnittpunkt), rechts ein konkaves (die Diagonalen haben keinen Schnittpunkt).

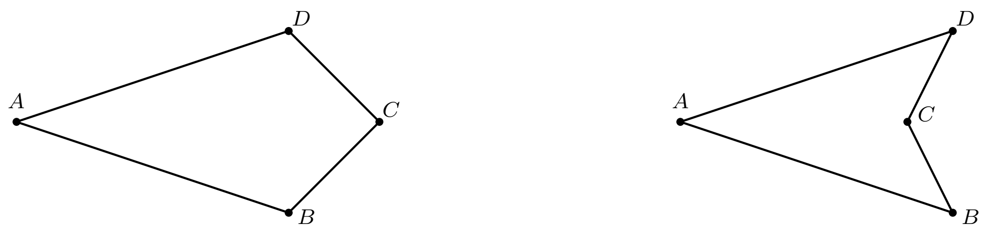


Abbildung 3.21: Zwei Beispiele für Drachenvierecke.

Satz 3.31 (Charakterisierung des Drachenvierecks) Für ein Viereck sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(a) Das Viereck ist ein Drachenviereck.

(b) Die Diagonalen (bzw. ihre Verlängerungen) stehen senkrecht aufeinander und eine der beiden Diagonalen wird von der anderen (bzw. ihrer Verlängerung) halbiert.

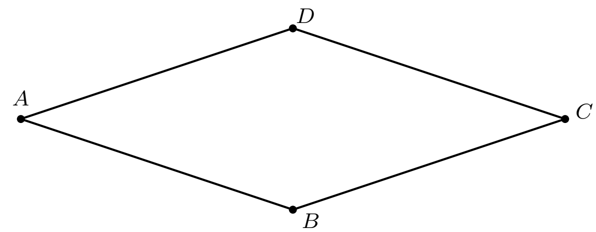
Der Zusatz "bzw. ihre Verlängerung" muss eingefügt werden, um auch den Fall eines nichtkonvexen Drachenvierecks zu berücksichtigen.

Beweis. Der Beweis bleibt als Übungsaufgabe. □

3.4.4 Die Raute

Definition 3.32 Ein Viereck heißt *Raute*, falls alle Seiten die gleiche Länge haben.

Im folgenden ist eine Raute abgebildet:



Satz 3.33 (Charakterisierung der Raute) Für ein Viereck $ABCD$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(a) $ABCD$ ist eine Raute.

(b) $ABCD$ ist ein Parallelogramm und ein Drachenviereck.

Beweis. “(a) $\Rightarrow$ (b)”:

Angenommen, $ABCD$ ist eine Raute. Dann sind insbesondere gegenüberliegende Seiten gleich lang, also ist $ABCD$ nach Punkt (c) aus Satz 3.29 ein Parallelogramm. Außerdem sind benachbarte Seiten gleich lang, also ist $ABCD$ nach Definition 3.32 eine Raute.

“(b) $\Rightarrow$ (a)”:

$ABCD$ ist ein Drachenviereck, also gibt es zwei Paare gleich langer Seiten. O.B.d.A. sei $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$. Weil $ABCD$ auch ein Parallelogramm ist, gilt $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$ und $|\overline{BC}| = |\overline{AD}|$. Alle drei Gleichungen zusammen ergeben

$$|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{CD}| = |\overline{AD}| .$$

□

3.4.5 Das Rechteck

Definition 3.34 Ein Viereck heißt *Rechteck*, falls es vier rechte Winkel hat.

Satz 3.35 (Charakterisierung des Rechtecks) Für ein Viereck $ABCD$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(a) $ABCD$ ist ein Rechteck.

(b) Die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ haben die gleiche Länge und halbieren sich gegenseitig.

Beweis. Der Beweis bleibt als Übungsaufgabe. □

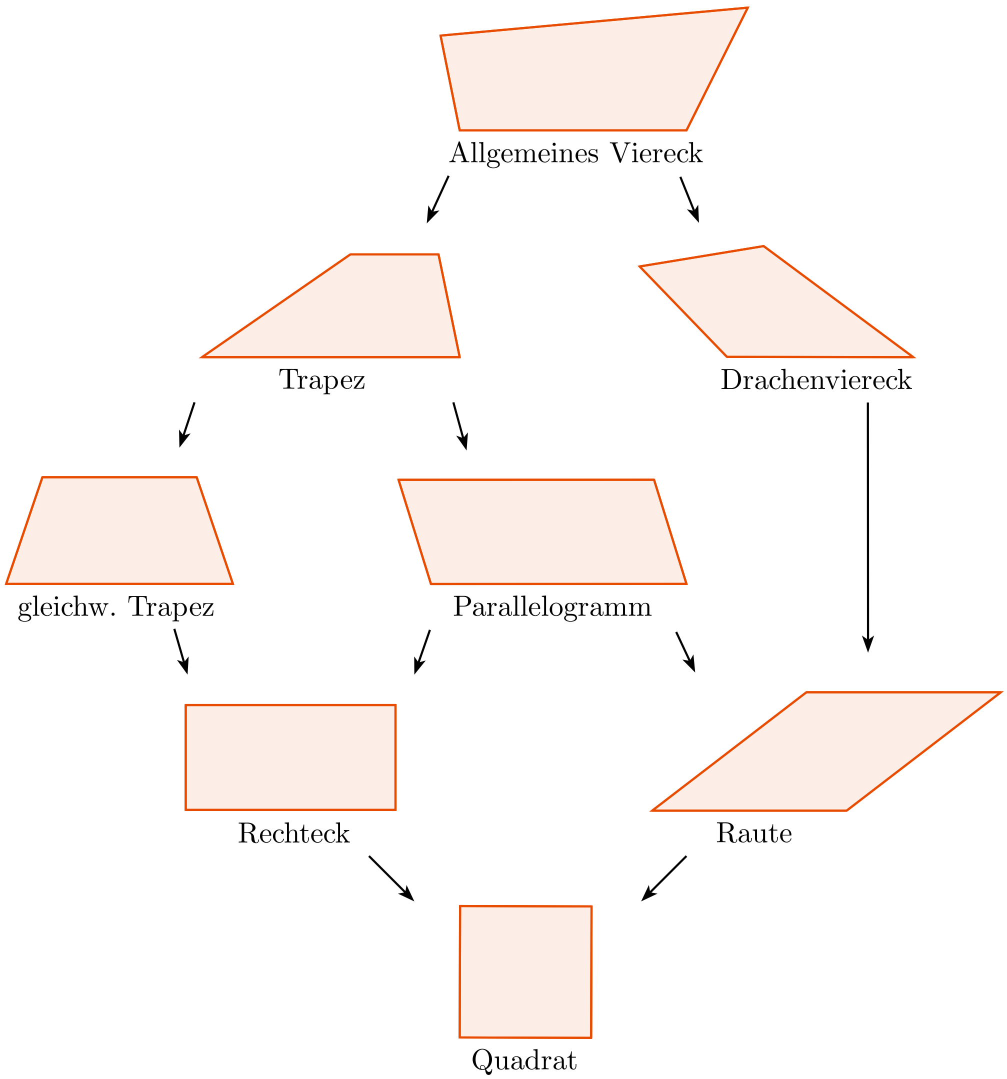


Abbildung 3.22: Das Haus der Vierecke.

3.4.6 Das Quadrat

Definition 3.36 Ein Viereck heißt *Quadrat*, falls es vier rechte Winkel hat und alle Seiten die gleiche Länge haben.

Das Quadrat ist ein Spezialfall aller anderen bisher definierten Vierecke. Alle Beziehungen der verschiedenen Definitionen untereinander sind in Abbildung 3.22 dargestellt.

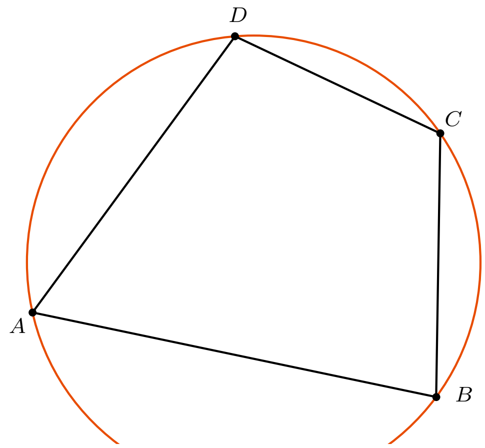


Abbildung 3.23: Beispiel für ein Sehnenviereck.

3.4.7 Das Sehnenviereck

Definition 3.37 Ein Viereck heißt Sehnenviereck, falls ein Kreis existiert, der durch alle vier Eckpunkte verläuft.

In Abbildung 3.23 ist ein Sehnenviereck mit seinem Umkreis abgebildet.

Satz 3.38 (Charakterisierung des Sehnenvierecks) Für ein Viereck $ABCD$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(a) $ABCD$ ist ein Sehnenviereck.

(b) Gegenüberliegende Winkel von $ABCD$ ergänzen sich zu $180°$.

3.5 Flächeninhalte

Die Berechnung von Flächeninhalten ist ein wichtiges Thema der Schulmathematik, allerdings nur schwer mathematisch präzise zu formulieren. Die präzise Definition des Begriffes wird im mathematischen Gebiet *Maßtheorie* gegeben. Der Vollständigkeit halber erwähnen wir die Definition im Falle der euklidischen Ebene und leiten daraus den Flächeninhalt des Dreiecks ab, dies wird sich im Allgemeinen allerdings nicht als Unterrichtsthema eignen. Ohne weitere Einführung gebrauchen wir hier auch zum einzigen Mal die reellen Zahlen – im allen anderen Abschnitte genügt Wissen über die rationalen Zahlen.

Definition 3.39 (Flächeninhalt) Der *Flächeninhalt* ist eine Abbildung aus der Menge der Figuren in die reellen Zahlen. Wir bezeichnen die Abbildung mit F, für eine Figur Δ ist $F(\Delta)$ also sein Flächeninhalt. F ist eindeutig bestimmt durch die folgenden Eigenschaften:

(i) $F(\Delta) \geq 0$ für alle Figuren Δ.

(ii) Sind Δ_1 und Δ_2 kongruent, so gilt $F(\Delta_1) = F(\Delta_2)$.

(iii) Sind Δ_1 und Δ_2 Figuren, die keine gemeinsamen inneren Punkte haben, dann gilt $F(\Delta_1 \cup \Delta_2) = F(\Delta_1) + F(\Delta_2)$. (Es ist erlaubt, dass die Ränder von F_1 und F_2 gemeinsame Punkte haben.)

(iv) Es sei E das Quadrat mit Seitenlänge 1, dann gilt $F(E) = 1$.

Satz 3.40 (Flächeninhalt des Rechtecks) Ein Rechteck mit Seitenlängen a und b hat den Flächeninhalt $a \cdot b$.

Beweis. Das bis auf Kongruenz eindeutige Rechteck mit Seitenlängen a und b notieren wir als $\square_{a,b}$. Falls a und b natürliche Zahlen sind, so ist $\square_{a,b}$ aus $a \cdot b$ Einheitsquadraten zusammengesetzt und die Behauptung folgt aus Forderung (iii) an F.

Es seien $a = \frac{p}{q}$ und $b = \frac{r}{s}$ rationale Zahlen. Aus dem ersten Teil des Beweises ist bekannt, dass $\square_{p,r} = \square_{aq,bs}$ den Flächeninhalt pr hat. $\square_{aq,bs}$ setzt sich aus $q \cdot s$ Rechtecken der Seitenlängen a und b zusammen. Diese kleinen Rechtecke sind paarweise kongruent. Nach Forderungen (ii) und (iii) gilt somit:

$$\begin{aligned} p \cdot r &= F(\square_{p,r}) \\ &= F(\square_{aq,bs}) \\ &= \underbrace{F(\square_{a,b}) + \cdots + F(\square_{a,b})}_{q \cdot s\text{-mal}} \\ &= (q \cdot s) F(\square_{a,b}) \end{aligned}$$

und Division durch $q \cdot s$ liefert die Behauptung.

Für irrationale a und b betrachtet man Folgen rationaler Zahlen a_n und b_n mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$. □

Satz 3.41 (Flächeninhalt des Dreiecks) Gegeben sei ein Dreieck ΔABC und sei h_a die Länge der Höhe auf $\overline{BC}$. Dann gilt

$$F(\Delta) = \frac{1}{2} \left|\overline{BC}\right| \cdot h_a.$$

Beweis. Angenommen, das Dreieck hat einen rechten Winkel bei B, d.h. ΔABC ist die Hälfte eines Rechtecks $ABCD$ mit Seitenlängen h_a und $\left|\overline{BC}\right|$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} h_a \cdot \left|\overline{BC}\right| &= F(ABCD) && \text{(nach Satz 3.40)} \\ &= F(\Delta ABC) + F(\Delta ACD) && \text{(nach (iii) aus Definition 3.39)} \\ &= 2 \cdot F(\Delta ABC) && \text{(nach (ii) aus Definition 3.39),} \end{aligned}$$

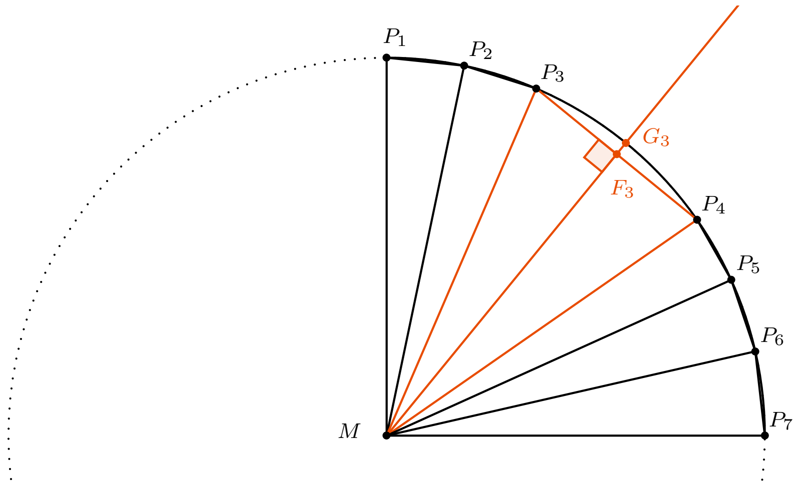


Abbildung 3.24: Skizze zum Beweis von 3.43.

was gerade die Behauptung ist.

Falls das Dreieck keinen rechten Winkel hat, so lässt es sich zerlegen in zwei rechtwinklige Dreiecke. Auf diese Teildreiecke können wir den ersten Teil des Beweises anwenden, woraus die Behauptung auch für das beliebige Dreieck folgt. □

Mithilfe von Satz 3.41 können die Flächeninhalte beliebiger Vielecke bestimmt werden, indem man ein Vieleck in Dreiecke zerlegt.

Definition 3.42 (Kreiszahl π) Die *Kreiszahl* π sei diejenige reelle Zahl, sodass der Umfang eines Kreises mit Radius 1 gerade 2π beträgt.

Es gilt $\pi \approx 3{,}1415965 \approx \frac{22}{7}$, siehe Aufgabe 3.30.

Satz 3.43 (Flächeninhalt des Kreises) (a) Ein Kreis mit Radius r hat den Umfang $2\pi r$.

(b) Ein Kreis mit Radius r hat den Flächeninhalt πr^2.

Beweisidee. Wir betrachten nur den Fall $r = 1$, d.h. wir möchten zeigen, dass ein Kreis mit Radius 1 den Flächeninhalt π hat. Die Aussage für allgemeines r folgt aus dem allgemeinen Fakt, wie sich Längen, Flächeninhalte und Volumina unter Streckung verhalten. Diese Aussage kann aus Satz 3.40 und der Definition des Flächeninhaltes abgeleitet werden.

Wir betrachten einen Kreis mit Radius 1 um M und $P_1, P_2, \ldots, P_n$ Punkte, die in dieser Reihenfolge auf einem Kreisviertel liegen. In Abbildung 3.24 ist der Fall $n = 7$ bei einer ungleichmäßigen Wahl der P_i gewählt:

Es sei $K_{P_i,P_{i+1}}$ der Kreissektor von P_i bis P_{i+1}. Dann gilt $F\left(K_{P_i,P_{i+1}}\right) \approx F(\Delta MP_iP_{i+1})$. Im Dreieck ΔMP_iP_{i+1} sei F_i der Höhenfußpunkt der Höhe auf $\overline{P_iP_{i+1}}$ und G_i der Schnittpunkt der Verlängerung der Höhe mit dem Kreis. (In der Skizze wurden zur Veranschaulichung F_3 und G_3 eingezeichnet) Dann gilt $\left|\overline{MG_i}\right| = 1$ für alle i und damit $F(\Delta MP_iP_{i+1}) = \frac{1}{2}\left|\overline{M_iF_i}\right| \cdot \left|\overline{P-iP_{i+1}}\right| \approx \frac{1}{2}\underbrace{\left|\overline{M_iG_i}\right|}_{=1} \cdot \left|\overline{P-iP_{i+1}}\right|$ für alle i.

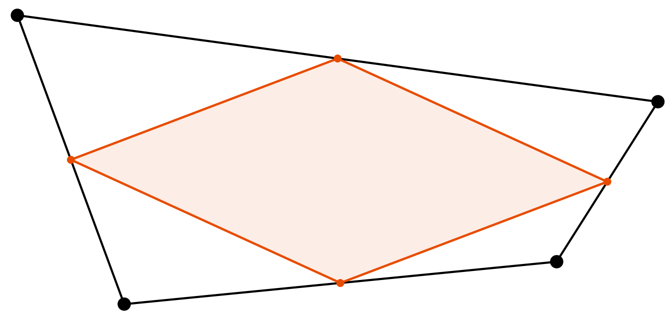


Abbildung 3.25: Viereck mit seinem Mittenviereck.

Es sei $l_{P_i,P_{i+1}}$ die Länge des Kreissegmentes von P_i bis P_{i+1}. Dafür gilt $l_{P_i,P_{i+1}} \approx |\overline{P_iP_{i+1}}|$. Zusammen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} &= l_{P_1,P_n} && \text{(nach Definition 3.42)}\\
&= l_{P_1,P_2} + \dots + l_{P_{n-1},P_n}\\
&\approx |\overline{P_1P_2}| + \dots + |\overline{P_{n-1}P_n}|\\
&\approx 2F(\Delta MP_1P_2) + \dots + 2F(\Delta MP_{n-1}P_n)\\
&\approx \frac{1}{2} \cdot F(\text{Einheitskreis}).
\end{aligned}$$

Wählen wir ein großes n, so können wir den Unterschied bei allen $\approx$-Zeichen beliebig klein machen. Daraus folgt $\pi = F(\text{Einheitskreis})$. □

3.6 Geometrie mit dem Computer

Dynamische Geometriesoftware erlaubt es, elementargeometrische Konstruktionen durchzuführen und anschließend Elemente zu verschieben, wobei sich die Konstruktion der Verschiebung anpasst. Im Folgenden werden einige geometrische Invarianten betrachtet. Um solche Invarianten zu entdecken, eignet sich dymanische Geometriesoftware: Man konstruiert ein Objekt und zeigt, dass dieses Objekt unter Verschieben der anfänglichen Punkte invariant ist. Nachdem die Invariante entdeckt wurde, kann versucht werden, eine Erklärung für die Invarianz zu finden.

3.6.1 Das Mittenviereck

Definition 3.44 (Mittenviereck) In einem n-Eck heißt das n-Eck, welches entsteht, wenn man die Mitten der n Seiten gegen den Uhrzeigersinn verbindet, *Mitten-n-Eck*.

Der Zusatz *gegen den Uhrzeigersinn* wird hier nur gemacht, um ein überschlagenes n-Eck zu verhindern. *Mit dem Uhrzeigersinn* ergäbe dasselbe n-Eck. In Abbildung 3.25 ist ein Viereck mit seinem Mittenviereck abgebildet:

Satz 3.45 (Satz über das Mittendreieck) Gegeben sei ein Dreieck ΔABC mit Seitenmittelpunkten M_a, M_b und M_c. Dann zerlegt $\Delta M_a M_b M_c$ das Dreieck ΔABC in vier kongruente Teildreiecke und $M_a M_b \parallel AB$, $M_b M_c \parallel BC$ und $M_a M_c \parallel AC$.

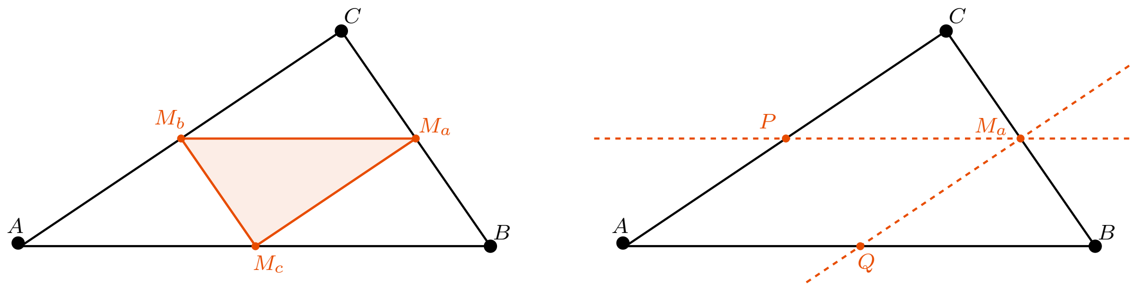


Abbildung 3.26: Skizze zum Beweis von Satz 3.45.

Beweis. Wir zeigen zuerst $\Delta CM_bM_a \simeq \Delta BM_aM_c$. Zeichne dazu Parallelen zu AB und AC durch M_a. Diese schneiden die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ in P und Q (siehe rechts in Abbildung 3.26). Dann gilt $\Delta CM_aP \simeq BM_aQ$ nach dem Kongruenzsatz "SWW" (siehe Satz 3.4).

Weiterhin gilt $\Delta PQM_a \simeq \Delta BM_aQ$ nach dem Kongruenzsatz "SWS" und $\Delta APQ \simeq CPM_a$ nach dem Kongruenzsatz "SWS". Zusammen erhalten wir also, dass die vier Teildreiecke ΔAPQ, ΔPQM_a, ΔBM_aQ und ΔCM_aP kongruent sind.

Damit gilt insbesondere $|\overline{AQ}| = |\overline{BQ}|$ und $|\overline{AP}| = |\overline{CP}|$, d.h. $Q = M_c$ und $P = M_b$, also $M_aM_b \parallel AB$ und $M_aM_c \parallel AC$. Die letzte Behauptung $M_bM_c \parallel BC$ folgt, indem man die Konstruktion mit M_b anstelle von M_a beginnt. □

Hinweis: Die Behauptung des Satzes folgt auch trivialerweise aus dem Strahlensatz, welcher aber in der Doppeljahrgangsstufe 7/8 noch nicht zur Verfügung steht.

Satz 3.46 (Satz über das Mittenviereck/Satz von Varignon) Das Mittenviereck eines beliebigen Vierecks ist ein Parallelogramm.

Beweis. Sei $ABCD$ ein beliebiges Viereck mit Seitenmitten M_a, M_b, M_c und M_d. Dann ist $M_aM_b \parallel AC$ und $M_cM_d \parallel AC$ nach Satz 3.45. Also $M_aM_b \parallel M_cM_d$. Analog folgt $M_bM_c \parallel M_aM_d$, was die Behauptung zeigt. □

3.6.2 Die Lotsumme im gleichseitigen Dreieck

Satz 3.47 (Lotsumme im gleichseitigen Dreieck/Satz von Viviani) Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck und ein Punkt P im Inneren des Dreiecks. Dann ist die Summe der Längen der Lote von P auf die Dreiecksseiten konstant.

Beweis. Der Beweis bleibt als Übungsaufgabe. □

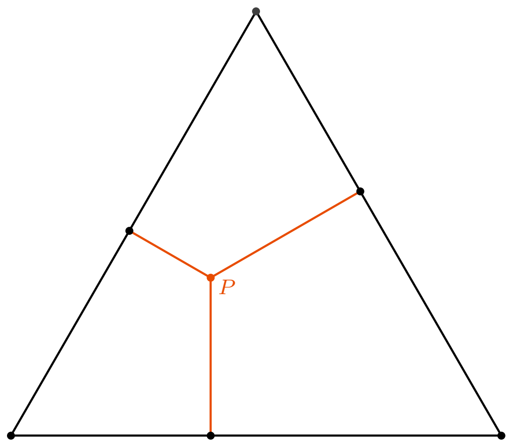


Abbildung 3.27: Punkt im Innern eines Dreiecks mit zugehörigen Loten.

3.6.3 Die Eulergerade

Satz 3.48 (Satz über die Eulergerade) In einem Dreieck sind Höhenschnittpunkt, Schwerpunkt und Umkreismittelpunkt kollinear, d.h. sie liegen auf einer gemeinsamen Geraden. Diese Gerade heißt *Eulergerade*.

Der Beweis sollte in der Doppeljahrgangsstufe 7/8 weggelassen werden, da er ohne den Begriff der Ähnlichkeit von Dreiecken sehr umständlich zu formulieren ist. In der Skizze weiter unten ist ein Dreieck (schwarz) mit seinem Schwerpunkt (grün), seinem Höhenschnittpunkt (blau), seinem Umkreismittelpunkt (orange) und seiner Eulergerade (rosa) dargestellt.

Beweis. Gegeben sei also ein Dreieck ΔABC mit Umkreismittelpunkt U, Schwerpunkt S und Höhenschnittpunkt H, wie in Abbildung 3.28. M_a, M_b und M_c seien die Mittelpunkte der Dreiecksseiten und F_b sei der Fußpunkt der Höhe auf $\overline{AC}$.

Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass $\angle BSH = \angle M_bSU$. Dann muss nämlich S auf UH liegen (weil die Winkel dann Scheitelwinkel sind).

Aus Satz 3.45 folgt, dass $AM_cM_aM_b$ ein Parallelogramm ist. Nach Satz 3.29 halbiert AM_a also die Strecke $\overline{M_bM_c}$. Folglich liegt die Halbierende der Seite $\overline{M_bM_c}$ von $\Delta M_aM_bM_c$ auf der Halbierenden der Seite $\overline{BC}$ von ΔABC. Analog folgt dies für die anderen Seitenhalbierenden, folglich haben ΔABC und $\Delta M_aM_bM_c$ beiden den Schwerpunkt S.

U ist per Definition der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von ΔABC. Die Mittelsenkrechten von ΔABC sind die Höhen von $\Delta M_aM_bM_c$, folglich ist U der Höhenschnittpunkt von $\Delta M_aM_bM_c$. Die Seitenlängen von $\Delta M_aM_bM_c$ sind halb so lang wie die von ΔABC, also gilt auch $\left|\overline{BH}\right| = 2 \cdot \left|\overline{M_bU}\right|$ – hier haben wir die Ähnlichkeit von Dreiecken benutzt.

Die Mittelpunkte der Strecken $\overline{BS}$ und $\overline{BH}$ seien P_1 bzw. P_2. Dann ist nach dem Kongruenzsatz "SWS" $\Delta P_1BP_2 \simeq M_bUs$. Nach Satz 3.45 ist $P_1P_2 \parallel HS$, also auch

$$\begin{aligned}\angle BSH &= \angle BP_1P_2 && \text{(Stufenwinkel)}\\ &= \angle M_bSU && \text{(weil } \Delta P_1BP_2 \simeq M_bUs\text{)}\end{aligned}$$

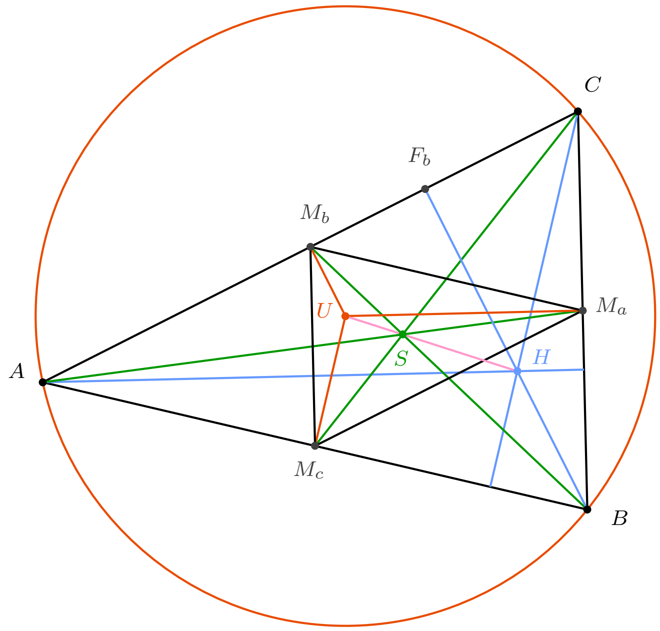


Abbildung 3.28: Skizze zum Beweis von Satz 3.48.

und das war gerade zu zeigen. □

3.7 Aufgaben

3.1. Beweise die Formel für die Innenwinkelsumme eines n-Ecks aus Satz 3.6.

3.2. Gegeben sei ein Parallelogramm $ABCD$, in dem $\angle CAB = \angle ACB = 20°$ gilt. Bestimme die Größen der Innenwinkel von $ABCD$.

3.3. Gegeben sei ein Dreieck ΔABC und ein Punkt D auf der Seite $\overline{BC}$. Über die Figur wird vorausgesetzt:

(a) ΔABC ist gleichschenklig, wobei $|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$,

(b) ΔABD ist gleichschenklig, wobei $|\overline{AB}| = |\overline{AD}|$,

(c) ΔADC ist gleichschenklig, wobei $|\overline{AD}| = |\overline{DC}|$.

Bestimme die Größen der Innenwinkel des Dreiecks.

3.4. Es sei $ABCD$ ein gleichwinkliges Trapez, sodass $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ parallel sind und $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ die gleiche Länge haben. Es sei M der Schnittpunkt der Diagonalen im Trapez. Beweise, dass dann gilt: $2\angle BAD = \angle AMD$.

3.5. Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$. Die Höhe von D auf die Diagonale $\overline{AC}$ halbiere den Winkel $\angle ADB$. Bestimme die Größen des Winkels $\angle BAC$.

3.6. Vervollständige den Beweis von Satz 3.12, d.h. beweise die Aussage des Satzes für den Fall, dass M nicht in der Dreiecksfläche ΔABC liegt.

3.7. Vervollständige den Beweis von Satz 3.38, d.h. beweise: In einem Sehnenviereck ergänzen sich gegenüberliegende Winkel zu 180°.

3.8. Beweise: Die Größe des Peripheriewinkels über einer Sehne hängt nur von der Länge der Sehne ab.

(D.h. beweise die folgende Aussage: Gegeben sei ein Kreis k mit Mittelpunkt M und zwei Kreissehnen $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$. Sei E ein Punkt auf dem Kreis auf der gleichen Seite von AB wie M und auf der gleichen Seite von BC wie M. Dann gilt: $\angle AEB = \angle CED$.)

3.9. Gegeben sei ein Kreis k mit Mittelpunkt M und die paarweise verschiedenen Punkte A, B und C auf der Kreislinie, die in dieser Reihenfolge gegen den Uhrzeigersinn angeordnet sind. Weiterhin soll C so liegen, dass AB und CM parallel sind und das Viereck $ABCM$ *überschlagen* ist, d.h. dass sich seine Diagonalen nicht schneiden.

Die Innenwinkelsumme des Vierecks betrage 270°. (Das ist nur die Summe der Winkel an den Eckpunkten. Der Winkel am Schnittpunkt der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AM}$ ist ohne Belang.) Gib die Größe aller Innenwinkel des Vierecks an.

3.10. Vervollständige die Beweise der Sätze 3.27, 3.29 und 3.31.

3.11. Für die Charakterisierung des Drachenvierecks (s. Satz 3.31) wurde gefordert, dass die Diagonalen des Vierecks senkrecht aufeinander stehen *und* eine der beiden Diagonalen von der anderen halbiert wird. Gelten auch die folgenden beiden Charakterisierungen?

(a) Ein Viereck ist genau dann ein Drachenviereck, wenn seine Diagonalen (bzw. deren Verlängerungen) senkrecht aufeinander stehen.

(b) Ein Viereck ist genau dann ein Drachenviereck, wenn seine Diagonalen (bzw. deren Verlängerungen) senkrecht aufeinander stehen, und sich die beiden Diagonalen halbieren.

Warum oder warum nicht?

3.12. Gegeben sei ein Viereck, dessen vier Seiten allesamt Tangenten an einen gemeinsamen Kreis sind. (D.h. jede Seite berührt den Kreis in genau einem Punkt) Eine Strecke, die zwei Berührpunkte von Kreis und Viereck verbindet, schließt zwei Winkel mit den Vierecksseiten ein, wie in Abbildung 3.29 dargestellt. Zeige, dass diese zwei Winkel die gleiche Größe haben.

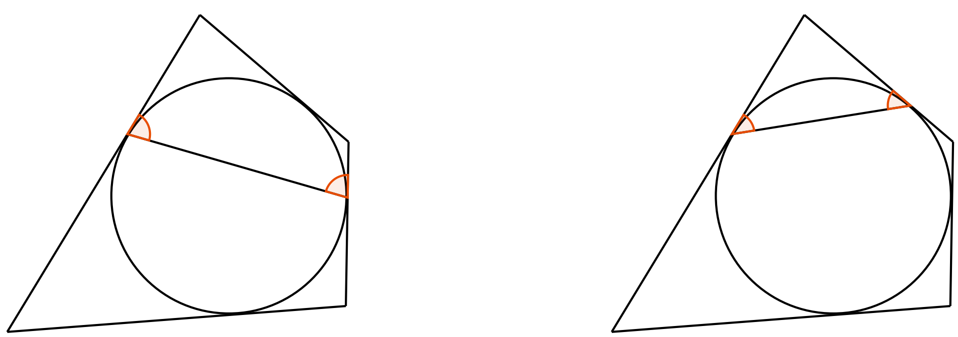


Abbildung 3.29: Winkel im Tangentenviereck.

3.13. Beweise den Satz über den Umkreis eines Dreiecks (Satz 3.20). Beweise dazu zunächst die Charakterisierung der Mittelsenkrechten aus Satz 3.14 und gehe dann ähnlich wie im Beweis von Satz 3.16 vor.

3.14. Wann liegt der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks in der Dreiecksfläche, wann liegt er außerhalb der Dreiecksfläche und wann liegt er auf dem Rand des Dreiecks? Wie lautet die Antwort auf die Frage für den Höhenschnittpunkt anstelles des Umkreismittelpunkts?

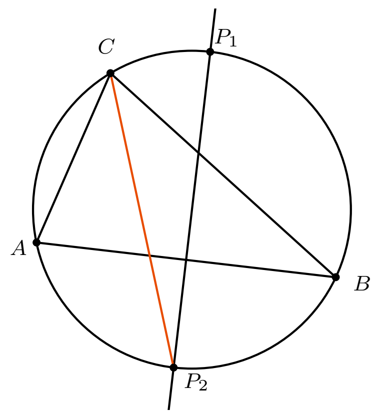
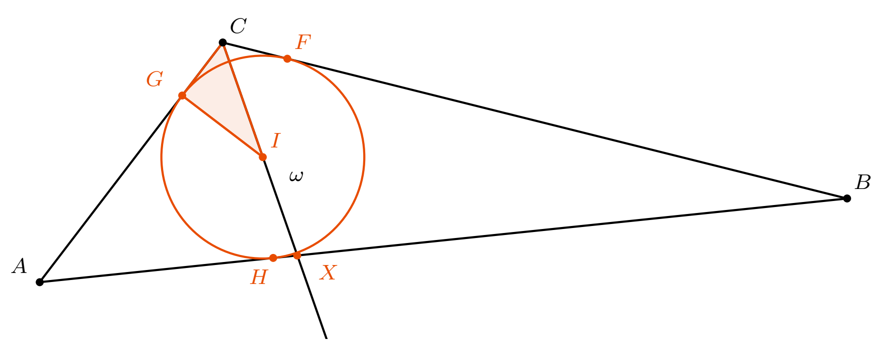


Abbildung 3.30: Dreieck mit Umkreis, Winkelhalbierender und Mittelsenkrechte.

3.15. Gib eine Konstruktionsbeschreibung für den Inkreis eines Dreiecks an. (D.h.: Um welchen Punkt und mit welchem Radius muss der Kreis gezeichnet werden?)

3.16. Gegeben sind die Größe eines Winkels γ, die Länge der Winkelhalbierenden ω_γ und der Inkreisradius r eines Dreiecks. Konstruiere das Dreieck aus diesen Größen.

Skizziere dazu zuerst die fertige Figur und führe eine *Analysis* durch. Das heißt: Überlege, welche Teilstücke der fertigen Figur du aus den Angaben konstruieren kannst. Beginne in diesem Fall mit dem Dreieck ΔCIG aus Eckpunkt, Inkreismittelpunkt und Inkreisfußpunkt. Wie kann das aus den Angaben konstruiert werden und wie konstruiert man dann den Rest der Figur?



3.17. Es sei r der Inkreisradius eines Dreiecks und s der halbe Dreiecksumfang. (D.h. für ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c ist $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$)

Beweise: Für den Flächeninhalt A des Dreiecks gilt

$$A = r \cdot s.$$

3.18. (a) In einem Dreieck schneide die Mittelsenkrechte M_c den Umkreis in den beiden Punkten P_1 und P_2, dabei soll P_1 auf der gleichen Seite von AB liegen wie C und P_2 auf der anderen Seite, wie in Abbildung 3.30 gezeigt. Zeige, dass die Gerade CP_2 den Winkel $\angle ACB$ halbiert.

(b) Der folgende Satz ist als *Südpolsatz* bekannt: *In einem Dreieck schneiden sich Mittelsenkrechte und zugehörige Winkelhalbierende auf dem Umkreis.* Wie hängt die Aussage dieses Satzes mit der zuvor bewiesenen Aussage zusammen?

3.19. Zeige: In jedem Dreieck gilt

$$a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c.$$

(a, b, c seien die Längen der Dreiecksseiten und h_a, h_b, h_c die Längen der zugehörigen Höhen)

3.20. Sei ΔABC ein Dreieck und X ein Punkt im Inneren der Dreiecksfläche. Wir setzen voraus, dass die Seitenlängen des Dreiecks die Beziehung $a \leq b \leq c$ erfüllen. Von X aus werden die Lote auf die Seiten BC, AC und AB gefällt und die Längen dieser Lote werden mit l_a, l_b und l_c bezeichnet.

(a) Beweise, dass $h_a \geq h_b \geq h_c$ gilt.

(b) Beweise, dass die Ungleichungen $h_a \geq l_a + l_b + l_c$ und $l_a + l_b + l_c \geq h_c$ gelten. Kann in diesen Ungleichungen der Gleichheitsfall eintreten? Falls ja, unter welchen Bedingungen?

3.21. Konstruiere ein Dreieck aus den Angaben der Längen von b, c und h_b.

3.22. In welchem Verhältnis schneiden sich die Höhen im gleichseitigen Dreieck?

3.23. Konstruiere ein Dreieck mit Umkreisradius $R = 4$cm, einer Seitenlänge $b = 4$cm und einer Seitenlänge $c = 7$cm. Wie viele nicht-kongruente Lösungen gibt es hier?

Gib einen Beweis an, dass diese Lösungen wirklich nicht-kongruent sind, auch wenn das schon mit bloßem Auge erkennbar ist. Nimm dazu an, dass eine Kongruenztransformation existiert, die die beiden Dreieck ineinander überführt. Falls so eine Transformation existiert, so muss sie Eckpunkte des einen Dreiecks auf Eckpunkte des anderen Dreiecks abbilden. Führe das zum Widerspruch.

3.24. Für welche Vierecke ist ihr Mittenviereck ein Rechteck? Für welche eine Raute?

3.25. Stimmen die folgenden Aussagen?

(a) Egal wie ein Viereck $ABCD$ aussieht, das Verhältnis der Flächeninhalte von $ABCD$ und seinem Mittenviereck ist immer das gleiche.

(b) Egal wie ein Viereck $ABCD$ aussieht, das Verhältnis der Umfänge von $ABCD$ und seinem Mittenviereck ist immer das gleiche.

3.26. Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck und ein Punkt im Innern des Dreiecks P.

(a) Beweise oder widerlege: Die Summe der Abstände von P zu den Eckpunkten ist unabhängig von der Wahl von P.

(b) Beweise oder widerlege: Die Summe der Abstände von P zu den Seitenmitten des Dreiecks ist unabhängig von der Wahl von P.

(c) Beweise Satz 3.47 aus Abschnitt 3.6.2.

3.27. Beweise oder widerlege:

(a) Gegeben sei ein Parallelogramm und ein Punkt P im Inneren des Parallelogramms. Dann ist die Summe der Abstände von P zu den Parallelogrammseiten (bzw. ihrer Verlängerungen) unabhängig von der Wahl von P.

(b) Gegeben sei ein regelmäßiges n-Eck und ein Punkt P im Inneren des n-Ecks. (Ein n-Eck heißt regelmäßig, wenn alle Seiten die gleiche Länge haben und alle Innenwinkel die gleiche Größe haben) Dann ist die Summe der Abstände von P zu den n-Ecksseiten unabhängig von der Wahl von P.

Hinweis: Die Lotsumme ist sogar schon unabhängig von der Wahl des inneren Punk-

tes, falls man nur fordert, dass alle Winkel des n-Ecks die gleiche Größe haben. Die Forderung, dass alle Seiten die gleiche Länge haben ist nicht notwendig. Der Beweis für diese Tatsache ist allerdings schwerer.

(c) Es gilt auch die Umkehrung von (b), d.h.: Wenn in einem n-Eck die Lotsumme unabhängig von der Wahl des inneren Punktes ist, dann ist das n-Eck regelmäßig.

3.28. Gegeben seien zwei Quadrate der gleichen Seitenlänge, sodass der Eckpunkt des ersten Quadrates auf dem Schnittpunkt der Diagonalen des zweiten Quadrates zu liegen kommt. Wie groß kann der Anteil, den das erste Quadrat vom zweiten überdeckt, höchstens werden? Konstruiere den Sachverhalt mit dynamischer Geometriesoftware mit beweglichem ersten Quadrat und lasse den Anteil anzeigen.

3.29. *Vortragsthema: Zweikreisfiguren.* Gegeben seien zwei Kreise. Es ist eine klassische Konstruktionsaufgabe, eine Gerade zu bestimmen, die Tangente an beide Kreise ist. Im Vortrag soll eine Konstruktion hierfür vorgestellt werden und die Richtigkeit der Konstruktion soll bewiesen werden. Möglich ist es auch, ein weiteres Zweikreisproblem zu behandeln, wie zum Beispiel die optimale Packung zweier Kreise mit gleichem Radius in einem Rechteck.

3.30. *Vortragsthema: Näherungsberechnung von π.* Im Vortrag soll π näherungsweise bestimmt werden. Entweder, indem man einen Kantenzug in einen Kreis einbeschreibt und dessen Länge berechnet, oder mit Hilfe einer Monte-Carlo-Methode.

3.31. *Vortragsthema: Schwerpunkt eines Dreiecks.* Erkläre den Namen *Schwerpunkt* für den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden eines Dreiecks. Zeige: Legt man ein Pappdreieck genau bei seinem Schwerpunkt auf eine Nadelspitze, so ist es ausbalanciert, anderenfalls nicht. Zeige dazu:

(a) Jede Seitenhalbierende teilt das Dreieck in zwei flächengleiche Teile.

(b) Zeichnet man Parallelen zur Seitenhalbierenden auf beiden Seiten im gleichen Abstand, so sind die Längen der Teile der Parallelen, welche in der Dreiecksfläche liegen, jeweils gleich lang. *Hinweis: Scherung.*

(c) Erkläre (ohne exakten mathematischen Beweis) anhand der vorherigen Ergebnisse und des Hebelgesetzes, dass das Dreieck ausbalanciert wird, wenn man es entlang einer Seitenhalbierenden auf ein Lineal legt. Daraus folgt die Behauptung.

3.32. Aufgaben der Mathematik-Olympiaden zum Thema *Kongruenzsätze*: 530832, 500724, 490736, 490835, 490844, 480724, 480835, 460834, 450846, 440813, 430736, 430844

Aufgaben der Mathematik-Olympiaden zum Thema *Winkelberechnung*: 550722, 550735, 550822, 550835, 550844, 530712, 530723, 530733, 530823, 530845, 520845, 510733, 510813, 510834, 500713, 500724, 500735, 500814, 500823, 500833, 500843, 490713, 490723, 490732, 490822, 490835, 480732, 480813, 480835, 480842, 470732, 470812, 470842, 450823, 450836, 440733, 440813, 440823, 440835, 440843, 430723, 430733, 430823, 430833

Aufgaben der Mathematik-Olympiaden zum Thema *Flächenberechnung*: 550722, 550822, 540724, 540735, 540823, 540836, 530735, 530835, 530845, 520712, 520723, 520723, 520812, 510845, 490736, 490832, 480724, 480823, 470712, 460736, 460733, 450723, 450733, 450813, 430836

Aufgaben der Mathematik-Olympiaden zum Thema *Eigenschaften von Vierecken*: 550835, 540836, 520832, 510733, 510813, 510824, 510833, 500836, 490736, 480833, 460736, 460845, 450733, 440733

Aufgaben der Mathematik-Olympiaden zum Thema *Besondere Punkte im Dreieck*: 550833, 540813, 540832, 530813, 530843, 520733, 520814, 520824, 510843, 480833, 470835, 470844, 450833, 440833

Aufgaben der Mathematik-Olympiaden zum Thema *Konstruktion von Figuren*: 540813, 540832, 530816, 530843, 520836, 520843, 480732, 460814, 460824, 460843, 440843

4. Zahlentheorie

4.1 Primzahlen, ggT und kgV

Definition 4.1 Seien x und y rationale Zahlen. x *teilt* y, falls y ein ganzzahliges Vielfaches von x ist. Wir schreiben dafür: $x|y$.

Definition 4.2 Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl, die von genau zwei natürlichen Zahlen geteilt wird.

D.h. die ersten Primzahlen lauten: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ... Insbesondere ist die Zahl 1 *keine* Primzahl, weil sie nur einen Teiler hat, nämlich sich selbst.

Der Vollständigkeit halber nennen wir im Folgenden eines der wohl bekanntesten Ergebnisse der Mathematik. Ein Beweis wurde bereits von Euklid ca. 300 v. Chr. gegeben.

Satz 4.3 Es existieren unendlich viele verschiedene Primzahlen.

Beweis. Der Beweis bleibt als Übungsaufgabe. □

Satz 4.4 (Fundamentalsatz der Arithmetik) Jede natürliche Zahl lässt sich eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen. Diese Zerlegung heißt Primfaktorzerlegung.

Beweis. Der Beweis bleibt als Übungsaufgabe. □

Dieser Satz erklärt auch, weshalb Definition 4.2 so gewählt wurde, dass 1 ausgeschlossen ist. Wäre nämlich 1 auch eine Primzahl, dann wäre die Primfaktorzerlegung nicht mehr eindeutig.

Die Primzahlzerlegung von 1 ist dabei das "leere Produkt". Die Zerlegung enthält keine Primfaktoren und hat dann per Definition den Wert 1. (Diese Konvention ist sinnvoll, wenn man die natürlichen Zahlen axiomatisch einführt)

Definition 4.5 Für zwei natürliche Zahlen x und y heißt die größte natürliche Zahl, welche x und y teilt, der *größte gemeinsame Teiler* von x und y. Wir schreiben dafür $\mathrm{ggT}(x, y)$. Für zwei natürliche Zahlen x und y heißt die kleinste natürliche Zahl, welche von x und y geteilt wird, das *kleinste gemeinsame Vielfache* von x und y. Wir schreiben dafür $\mathrm{kgV}(x, y)$.

Verfahren 4.6 ggT(x, y) bestimmen.

(i) Bestimme die Primfaktorzerlegungen von x und y.

(ii) Markiere alle Primfaktoren (mit ihrer Häufigkeit), die in beiden Primfaktorzerlegungen vorkommen.

(iii) Multipliziere alle Primfaktoren (mit ihrer Häufigkeit), die in beiden Primfaktorzerlegungen vorkommen. Das Ergebnis ist ggT(x, y).

Verfahren 4.7 kgV(x, y) bestimmen.

(i) Bestimme die Primfaktorzerlegungen von x und y.

(ii) Markiere alle Primfaktoren (mit ihrer Häufigkeit), die in mindestens einer der beiden Primfaktorzerlegungen vorkommen.

(iii) Multipliziere alle Primfaktoren (mit ihrer Häufigkeit), die in mindestens einer der beiden Primfaktorzerlegungen vorkommen. Das Ergebnis ist kgV(x, y).

Als Beispiel seien $x = 75$ und $y = 250$ gegeben. Die Primzahlzerlegungen beider Zahlen lauten $x = 3 \cdot \underline{5} \cdot \underline{5}$ und $y = 2 \cdot \underline{5} \cdot \underline{5} \cdot 5$, dabei wurden diejenigen Primfaktoren unterstrichen, die in beiden Primfaktorzerlegungen auftreten.

ggT(x, y) ist also das Produkt der unterstrichenen Zahlen, d.h. ggT$(x, y) = 5 \cdot 5 = 25$. Und kgV$(x, y) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 150$.

Satz 4.8

(a) Verfahren 4.6 zur Bestimmung des ggT liefert das richtige Ergebnis.

(b) Verfahren 4.7 zur Bestimmung des kgV liefert das richtige Ergebnis.

Beweis.

(a) Es seien x und y natürliche Zahlen mit gemeinsamen Primfaktoren $p_1, \ldots, p_n$ und Primfaktorzerlegungen

$$x = p_1 \cdot p_2 \ldots p_n \cdot a_1 \cdot a_2 \ldots a_i,$$
$$y = p_1 \cdot p_2 \ldots p_n \cdot b_1 \cdot b_2 \ldots b_j,$$

wobei $a_1, \ldots, a_i$ Primzahlen verschieden von den Primzahlen $b_1, \ldots, b_j$ sind.

Verfahren 4.6 liefert dann die Zahl $p := p_1 \cdot p_2 \ldots p_n$. Wir haben $p \mid \mathrm{ggT}(x, y)$, andernfalls wäre $g := \mathrm{ggT}(x, y)$ nicht maximal, schreibe also $\mathrm{ggT}(x, y) = p \cdot c_1 \cdot c_2 \ldots c_k$. Angenommen, $k \geq 1$. Weiter gilt

$$g \mid x \Rightarrow c_1 \ldots c_k \mid a_1 \ldots a_i, \tag{4.1}$$
$$g \mid y \Rightarrow c_1 \ldots c_k \mid b_1 \ldots b_j \tag{4.2}$$

und wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung (siehe Satz 4.4) gilt nach Gleichung 4.1 $c_\lambda \in \{a_1, \ldots, a_i\}$ für $1 \leq \lambda \leq k$ und nach Gleichung 4.2 $c_\lambda \in \{b_1, \ldots, b_j\}$ für $1 \leq \lambda \leq k$, was ein Widerspruch dazu ist, dass die a_μ und b_ν verschieden sind.

D.h. die Annahme $k \geq 1$ war falsch und wir haben tatsächlich $p = g$.

(b) Bleibt als Übungsaufgabe. □

Verfahren 4.9 Euklidischer Algorithmus zur Berechnung von $\operatorname{ggT}(x, y)$.

(i) Falls $x = 0$, so ist $\operatorname{ggT}(x, y) = y$. Falls $y = 0$, so ist $\operatorname{ggT}(x, y) = x$.

(ii) Subtrahiere die kleinere der beiden Zahlen x und y von der größeren.

(iii) Nenne die kleinere der beiden Zahlen aus dem vorigen Schritt x und das Ergebnis aus Schritt (1) y und beginne wieder bei Schritt (i).

Im folgenden Beispiel ist das Verfahren für die Zahlen $x = 81$ und $y = 315$ vorgeführt:

$$\begin{aligned} &(x = 81, y = 315) \overset{(i),(ii),(iii)}{\Rightarrow} (81, 234) \overset{(i),(ii),(iii)}{\Rightarrow} (81, 153) \overset{(i),(ii),(iii)}{\Rightarrow} (81, 72) \\ &\overset{(i),(ii),(iii)}{\Rightarrow} (72, 9) \overset{(i),(ii),(iii)}{\Rightarrow} \ldots \overset{(i),(ii),(iii)}{\Rightarrow} (9, 9) \overset{(i),(ii),(iii)}{\Rightarrow} (9, 0), \end{aligned}$$

d.h. $\operatorname{ggT}(x, y) = 9$.

Satz 4.10 Verfahren 4.9 zur Bestimmung des ggT liefert das richtige Ergebnis.

Beweis. Der Beweis bleibt als Übungsaufgabe. □

4.2 Restklassenarithmetik (Modulo-Rechnung)

Es stellt sich heraus, dass man von einer Zahl häufig nur eine bestimmte Information interessant ist und nicht die ganze Zahl. Möchte man zum Beispiel die letzte Ziffer einer Zahl berechnen, so geht das unter Umständen ohne die ganze Zahl an sich zu berechnen. Bei Angabe eines Datums schreibt man auch manchmal 17.04. anstelle von 17.04.2017 n. Chr. Die Information "2017 n. Chr." war in dieser Situation aus irgendeinem Grunde nicht so wichtig.

Im Folgenden erklären wir einen Formalismus, der es erlaubt, mit *Resten von Zahlen* anstelle von Zahlen selbst zu rechnen.

Definition 4.11 Sei m eine natürliche Zahl. Seien a, b zwei ganze Zahlen.
a und b heißen *kongruent modulo* m, wenn sie bei Division durch m denselben Rest lassen, also wenn zwei ganze Zahlen p_1 und p_2 existieren mit $p_1 \cdot m + a = p_2 \cdot m + b$.
Wir schreiben dafür auch:

$$a \equiv b \text{ (mod m)}$$

und sagen *a und b sind äquivalent.*

Beispiele:

(1) $17 \equiv 3 \pmod 7$, denn beide Zahlen lassen bei Division durch 7 den Rest 3. Mit den Bezeichnungen von oben wählen wir $p_1 = 0$ und $p_2 = 2$ und erhalten: $0 \cdot 7 + 17 = 2 \cdot 7 + 3$.

(2) $0 \equiv -5 \pmod 5$, denn $(-1) \cdot 5 + 0 = 0 \cdot 5 + (-5)$

(3) $7 \equiv -13 \pmod 2$, denn $0 \cdot 2 + 7 = 10 \cdot 2 + (-13)$

(4) $1000 \equiv -1 \pmod{13}$, denn $0 \cdot 13 + 1000 = 77 \cdot 13 + (-1)$

Satz 4.12 Für zwei ganze Zahlen a, b gilt:

$$a \equiv b \text{ (mod m)} \Leftrightarrow m \mid a - b.$$

Beweis. Wir beweisen die beiden Richtungen der Aussage getrennt voneinander:

"$\Rightarrow$" Seien also a, b, m mit $a \equiv b \pmod m$ gegeben. Das heißt nach Definition: Es existieren ganze Zahlen p_1 und p_2 mit

$$\begin{aligned} & & p_1 \cdot m + a &= p_2 \cdot m + b \\ &\Rightarrow & (p_1 - p_2) \cdot m &= b - a \\ &\Rightarrow & p_1 - p_2 &= \frac{b-a}{m} \end{aligned}$$

Hier ist $(p_1 - p_2)$ eine ganze Zahl. Foglich steht auch auf der rechten Seite der Gleichung eine ganze Zahl. Also ist $\frac{b-a}{m}$ ganze Zahl. Das heißt aber gerade, dass m die Zahl $(b - a)$ teilt.

"$\Leftarrow$" Seien also a, b, m mit $m \mid (b-a)$ gegeben. Folglich ist $\frac{b-a}{m}$ eine ganze Zahl. Zur Abkürzung nennen wir diese Zahl p_1. Also:

$$\begin{aligned} & & p_1 &= \frac{b-a}{m} \\ &\Rightarrow & p_1 \cdot m &= b - a \\ &\Rightarrow & p_1 \cdot m + a &= b \\ &\Rightarrow & p_1 \cdot m + a &= \underbrace{0}_{p_2} \cdot m + b \end{aligned}$$

Und nach Definition von Äquivalenz ist also $a \equiv b \pmod m$. ∎

Dieser Satz hilft uns dabei, schnell zu erkennen, ob zwei Zahlen äquivalent sind. Denn so müssen wir keine geeigneten p_1 und p_2 mehr finden, sondern können einfach eine Differenz betrachten:

Beispiele:

(1) $17 \equiv 3 \pmod 7$, denn $(17 - 3) : 7 = 2$.

(2) $1000 \equiv -1 \pmod{13}$, denn $(1000 - (-1)) : 13 = 77$.

Satz 4.13 (Rechenregeln für Kongruenzen) Seien $m \geq 1$ und a, b, a' und b' ganze Zahlen, für die gilt: $a \equiv b$ (mod m) und $a' \equiv b'$ (mod m). Dann gilt:

(a) $a + a' \equiv b + b'$ (mod m),

(b) $a \cdot a' \equiv b \cdot b'$ (mod m).

Beweis.

(a) Seien also a, b, a', b', m gegeben mit $a \equiv b \pmod{m}$ und $a' \equiv b' \pmod{m}$. Nach Satz 4.12 ist also $m \mid b - a$ und $m \mid b' - a'$.

Die Summe von zwei durch m teilbaren Zahlen ist wieder durch m teilbar. Das heißt: $m \mid (b - a) + (b' - a')$, beziehungsweise mit anderer Klammerung:

$$m \mid (b + b') - (a + a').$$

Das bedeutet nach der Rückrichtung von Satz 4.12 aber gerade, dass

$$b - b' \equiv a - a' \pmod{m}.$$

(b) Bleibt als Übungsaufgabe. □

Beispiele:

(1) Es ist: $14 \equiv 1 \pmod{13}$ und $12 \equiv -1 \pmod{13}$. Damit gilt nach dem obigen Satz:

   (i) $26 \equiv 0 \pmod{13}$

   (ii) $12 \cdot 14 = 168 \equiv -1 \pmod{13}$

(2) Mit den Bezeichnungen des obigen Satzes wählen wir $m = 6$, $a = a' = 7$ und $b = b' = 1$; für diese Zahlen gilt $7 \equiv 1 \pmod{6}$. Aus dem obigen Satz folgt dann:

   - $7 \cdot 7 = 7^2 \equiv 1 \cdot 1 = 1 \pmod{6}$
   - $7 \cdot 7^2 = 7^3 \equiv 1 \cdot 1 = 1 \pmod{6}$ (hier haben wir $a = 7$, $b = 1$, $a' = 7^2$, $b' = 1$ betrachtet)
   - ...
   - $7^{100} \equiv 1 \pmod{6}$

(3) Es gilt $11 \equiv 1 \pmod{10}$. Mit dem Satz erhalten wir: Für jede natürliche Zahl k gilt: $11^k \equiv 1 \pmod{10}$. Oder mit anderen Worten: Jede 11er-Potenz endet mit der Ziffer 1.

Wie man schon in den Beispielen sieht, erhalten wir damit ein praktisches Verfahren, um Reste von Potenzen zu bestimmen. Wir zeigen dies am Beispiel der Frage: *Auf welche Ziffer endet* 13^{13}*?*

Gesucht ist also

$$13^{13} \equiv \; ? \pmod{10}$$

(i) Wenn die Basis der betrachteten Potenz (hier: 13) größer ist als der Modul (hier: 10), so vereinfachen wir die Potenz, indem wir die Basis modulo 10 betrachten. Das heißt in unserem Fall: $13 \equiv 3 \pmod{10} \Longrightarrow$

$$13^{13} \equiv 3^{13} \pmod{10}$$

(ii) Wir betrachten nun also die Potenz 3^{13}. Hier bestimmen wir solange Potenzen, bis wir einen leichten Rest erhalten:

$$\begin{aligned} 3^1 &= 3 \equiv 3 \pmod{10} \\ 3^2 &= 9 \equiv 9 \pmod{10} \\ 3^3 &= 27 \equiv 7 \pmod{10} \\ 3^4 &= 3^3 \cdot 3 \equiv 7 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{10} \end{aligned}$$

Dabei mussten wir im letzten Schritt nicht den genauen Wert 3^4 ausrechnen, sondern haben mit dem Rest 3^3 weitergerechnet.

(iii) Wir zerlegen jetzt die gesuchte Potenz 3^{13} in Potenzen, sodass möglichst oft die Potenz 3^4 vorkommt, weil diese ja einen sehr einfachen Rest hat.

Wir wählen die Zerlegung:

$$3^{13} = 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3$$

(iv) Wir fassen nun alle Erkenntnisse zusammen und erhalten:

$$\begin{aligned} 13^{13} &\equiv 3^{13} && \text{(Nach 1.)} \\ &\equiv 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3 && \text{(Nach 3.)} \\ &\equiv 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 && \text{(Nach 2.)} \\ &\equiv 3 \pmod{10} \end{aligned}$$

Also endet die Zahl 13^{13} mit der Ziffer 3. Dies kann man übrigens mit einem Taschenrechner nachprüfen: Tatsächlich ist $13^{13} = 302875106592253$.

Satz 4.14 Seien a, b, c beliebige ganze Zahlen. Sei m eine natürliche Zahl, die teilerfremd zu c ist, d.h. $\mathrm{ggT}(c, m) = 1$. Dann gilt:

$$a \cdot c \equiv b \cdot c \text{ (mod m)} \Rightarrow a \equiv b \text{ (mod m)}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} & a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{m} \\ \Rightarrow\ & m \mid bc - ac && \text{nach Satz 4.12} \\ \Rightarrow\ & m \mid (b-a)c \\ \Rightarrow\ & m \mid b - a && \text{weil } m \text{ und } c \text{ teilerfremd} \\ \Rightarrow\ & a \equiv b \pmod{m}. \end{aligned}$$

Die vorletzte Implikation erhält man, indem man die Primfaktorzerlegungen von m, $(b-a)$ und c betrachtet. □

Wir wenden die Kongruenz-Schreibweise nun an, um zwei nützliche Teilbarkeitsregeln zu beweisen:

Satz 4.15 (Teilbarkeit durch 11) Eine Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist.

Beweis. Sei $z = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ mit $(n+1)$ Stellen eine beliebige Zahl. Die alternierende Quersumme von z ist dann nach Definition $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 \pm \dots$ Wir stellen fest:

$$\begin{aligned} 10 &\equiv -1 \pmod{11}, \\ 10^k &\equiv (-1)^k \pmod{11} && \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} & z \text{ ist durch 11 teilbar} \\ \Leftrightarrow\ & z \equiv 0 \pmod{11} \\ \Leftrightarrow\ & 10^n \cdot a_n + \dots + 10^1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_0 \equiv 0 \pmod{11} \\ \Leftrightarrow\ & (-1)^n \cdot a_n \dots - \cdot a_1 + 1 \cdot a_0 \equiv 0 \pmod{11} \\ \Leftrightarrow\ & \text{Die alternierende Quersumme von } z \text{ ist durch 11 teilbar.} \end{aligned}$$

□

Beispiel:

(i) Wir betrachten die Zahl $z = 1085195$. Die alternierende Quersumme dieser Zahl ist $5 - 9 + 1 - 5 + 8 - 0 + 1 = 1$, also nicht durch 11 teilbar. Folglich ist auch z selbst nicht durch 11 teilbar.

Tatsächlich gilt $1085195 : 11 = 98654,\overline{09}$.

(ii) Wir betrachten die Zahl $z = 6105$. Die alternierende Quersumme dieser Zahl ist $5 - 0 + 1 - 6 = 0$, also durch 11 teilbar. Folglich ist z selbst durch 11 teilbar.

Tatsächlich gilt $6105 : 11 = 555$.

Satz 4.16 (Teilbarkeit durch 7) Streicht man von einer Zahl die letzte Ziffer und zieht das Doppelte der weggestrichenen Ziffer von der übrigen Zahl ab, so ist das Ergebnis genau dann durch 7 teilbar, wenn die Ausgangszahl durch 7 teilbar war.

Beweis. Die Ausgangszahl sei mit z bezeichnet. Wir schreiben $z = 10a+b$ und die Voraussetzung besagt dann gerade, dass $a - 2b$ durch 7 teilbar ist, d.h. $a - 2b \equiv 0 \pmod 7$.

Weil $-1 \equiv -1$ gilt nach Satz 4.13 auch: $-a + 2b \equiv 0 \pmod 7$.

Weil $21a \equiv 0$ gilt nach dem gleichen Satz auch: $21a - a + 2b \equiv 0 \pmod 7$, also mit anderen Worten $2 \cdot (10a + b) \equiv 2 \cdot 0 \pmod 7$.

Weil 2 und 7 teilerfremd sind (d.h. $\mathrm{ggT}(2, 7) = 1$), gilt nach Satz 4.14 auch:

$$10a + b \equiv 0 \pmod 7$$

das heißt aber gerade, dass $10a + b$ durch 7 teilbar ist. □

4.3 Der kleine Satz von Fermat

Satz 4.17 (Kleiner Satz von Fermat) Für eine Primzahl p und eine natürliche Zahl n, die kein Vielfaches von p ist, gilt

$$n^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Beweis. Seien a, b natürliche Zahlen mit $0 < a < b < p$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & a \not\equiv b && \pmod p \\ \Rightarrow\quad & na \not\equiv nb && \pmod p \end{aligned}$$

nach Satz 4.14. D.h. die Zahlen $n, 2n, \ldots, (p-1)n$ lassen bei Division durch p alle unterschiedliche Reste. p teilt keine dieser Zahlen, also müssen genau die Reste $1, 2, \ldots, (p-1)$ auftreten – möglicherweise aber in anderer Reihenfolge. Multiplizieren wir die Zahlen $n, 2n, \ldots, (p-1)n$, so ist das Produkt also äquivalent zum Produkt der Reste, d.h.

$$\begin{aligned} & n \cdot 2n \cdot 3n \cdot \cdots \cdot (p-1)n \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (p-1) && \pmod p \\ \Rightarrow\quad & n^{p-1} \cdot (p-1)! \equiv (p-1)! && \pmod p \\ \Rightarrow\quad & n^{p-1} \equiv 1 && \pmod p, \end{aligned}$$

dabei konnten wir für die letzte Implikation Satz 4.14 benutzen, weil $\mathrm{ggT}(1, p) = 1$, $\mathrm{ggT}(2, p) = 1$, $\ldots$, $\mathrm{ggT}(p-1, p) = 1$. Dies gilt, weil p eine Primzahl ist. □

4.3.1 Die Eulersche φ-Funktion

Definition 4.18 Für eine natürliche Zahl n sei

$$\varphi(n) = \text{Anzahl von pos. Zahlen, die zu } n \text{ teilerfremd und } \leq n \text{ sind.}$$

Beispiel:

(i) $\varphi(12) = 4$, weil nämlich die Zahlen 1, 5, 7, 11 teilerfremd zu 12 sind. Alle anderen Zahlen, die kleiner oder gleich 12 sind, aber nicht.

(ii) $\varphi(7) = 6$, weil alle Zahlen, die kleiner als 7 sind, zu 7 teilerfremd sind.

(iii) Allgemein gilt für jede Primzahl p:

$$\varphi(p) = p - 1.$$

Mathematiker sind sehr interessiert daran, die Eulersche φ-Funktion besser zu verstehen. Bis heute ist nicht klar, nach welchem Muster Primzahlen verteilt sind. Das heißt zum Beispiel: Es ist keine Zahlenfolge bekannt, die sich mit den üblichen arithmetischen Operationen definieren lässt, die nur aus Primzahlen besteht. Falls man aber die Werteverteilung der φ-Funktion gut beschreiben könnte (z.B. aus anderen Eigenschaften der φ-Funktion vorhersagen könnte, wann $\varphi(x) = x - 1$ gilt), dann hätte man auch die Primzahlverteilung erklärt.

Im Folgenden sind die wichtigsten Eigenschaften der φ-Funktion genannt.

Satz 4.19 (Multiplikativität der φ-Funktion) Seien m und n zwei natürliche Zahlen mit $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$. Dann gilt

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n).$$

Beweis. Seien $x_1, \ldots, x_k$ die natürlichen Zahlen $\leq m$, die teilerfremd zu m sind, und $x_{k+1}, \ldots, x_m$ die natürlichen Zahlen $\leq m$, die nicht teilerfremd zu m sind. Analog seien $y_1, \ldots, y_l$ die natürlichen Zahlen $\leq n$, die teilerfremd zu n sind, und $y_{l+1}, \ldots, y_n$ die natürlichen Zahlen $\leq n$, die nicht teilerfremd zu n sind.

Wir zählen nun die Zahlen z mit $z \leq mn$, $\mathrm{ggT}(z, m) = 1$ und $\mathrm{ggT}(z, n) > 1$. Dies sind gerade die Zahlen $z = x_i y_j$, wobei $1 \leq i \leq k$ und $l + 1 \leq j \neq n$. Insgesamt gibt es von diesen Zahlen $\varphi(m)(n - \varphi(n))$ Stück.

Analog gibt es $(m - \varphi(m))\varphi(n)$ Zahlen z mit $z \leq mn$ und $\mathrm{ggT}(z, m) > 1$ und $\mathrm{ggT}(z, n) = 1$.

Weiterhin gibt es $(m-\varphi(m))(n-\varphi(n))$ Zahlen z mit $z \leq mn$ und $\mathrm{ggT}(z, m) > 1$ und $\mathrm{ggT}(z, n) > 1$.

Zusammen erhalten wir also

$$\begin{aligned}
\varphi(mn) &= mn - \#\{\text{Zahlen } z \leq mn \text{ mit } \operatorname{ggT}(z, mn) > 1\} \\
&= mn - \#\{\text{Zahlen } z \leq mn \text{ mit } \operatorname{ggT}(z, m) > 1, \operatorname{ggT}(z, n) = 1\} \\
&\qquad - \#\{\text{Zahlen } z \leq mn \text{ mit } \operatorname{ggT}(z, m) = 1, \operatorname{ggT}(z, n) > 1\} \\
&\qquad - \#\{\text{Zahlen } z \leq mn \text{ mit } \operatorname{ggT}(z, m) > 1, \operatorname{ggT}(z, n) > 1\} \\
&= mn - \varphi(m)(n - \varphi(n)) - (m - \varphi(m))\varphi(n) - (m - \varphi(m))(n - \varphi(n)) \\
&= \varphi(m)\varphi(n).
\end{aligned}$$

□

Satz 4.20 (Eigenschaften der φ-Funktion)

(a) Für eine Primzahl p und eine natürliche Zahl k gilt $\varphi\left(p^k\right) = p^k - p^{k-1}$.

(b) Für eine natürliche Zahl n mit Primfaktorzerlegung $n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ gilt

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Die Schreibweise $\prod_{p|n}$ steht hier für "Produkt über alle p, die n teilen" und die genaue Bedeutung ist durch das zweite Gleichheitszeichen in der gleichen Zeile erklärt.

Beweis. (a) folgt durch Abzählen und (b) folgt aus (a) zusammen mit der Multiplikativität der φ-Funktion aus Satz 4.19. □

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung vom kleinen Satz von Fermat (Satz 4.17). Der Beweis ist ähnlich zum Beweis von Satz 4.17, wird hier aber weggelassen.

Satz 4.21 (Satz von Fermat-Euler) Seien a und m zwei natürliche, teilerfremde Zahlen. Dann gilt

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

4.4 Interessante Zahlenfolgen

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit Zahlenfolgen, die wir auf verschiedene Arten notieren können:

(i) *Informell*, d.h. in der Form $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$, wobei die x_i Zahlen sind. Diese Form ist einfach zu notieren, allerdings ist nicht immer klar, wie es bei "…" weitergeht, daher sollte man versuchen, eine der anderen Notationen zu benutzen, falls möglich. Ein Beispiel ist die Zahlenfolge

$$0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots \tag{4.3}$$

(ii) *Explizit*, d.h. in der Form $x_i = f(i)$, wobei f eine Funktion ist. Man kann in die explizite Form eine Zahl i einsetzen und erhält damit das i-te Folgenglied. Die Zahlenfolge 4.3 wäre in dieser Schreibweise zum Beispiel

$$x_i = 2i. \tag{4.4}$$

(iii) *Rekursiv*, d.h. es werden k Startwerte $x_0, x_1, \ldots, x_k$ vorgegeben und die restlichen Folgenglieder berechnen sich durch eine Rekursionsformel der Form $x_i = f(x_{i-1}, x_{i-2}, \ldots, x_{i-k})$. Im Folgenden ist die Zahlenfolge 4.3 in dieser Schreibweise notiert. Man muss hier nur einen Startwert vorgeben:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0; \\ x_i &= x_{i-1} + 2 \text{ für } i \geq 1. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Viele Zahlenfolgen können leicht rekursiv definiert werden, es ist aber häufig ein sehr schweres Problem, eine explizite Formel für eine Zahlenformel anzugeben. Für einige Zahlenfolgen ist das Problem, eine explizite Formel zu finden, seite vielen Jahrzehnten ungelöst.

Es sei noch erwähnt, dass wir manchmal anstelle bei $i = 0$ erst bei $i = 1$ beginnen. Manchmal gibt es eine bestimmte geometrische Definition einer Zahlenfolge, die einen Start bei $i = 1$ sinnvoll macht.

4.4.1 n-Eckszahlen

Die Folge der n-Eckszahlen ist diejenige Folge, deren i-tes Folgenglied sich ergibt, wenn man zählt, aus wie vielen Punkten ein regelmäßiges n-Eck mit einer Seitenlänge von i Punkte besteht. In Abbildung 4.1 ist der Fall $n = 3$ aufgezeichnet.

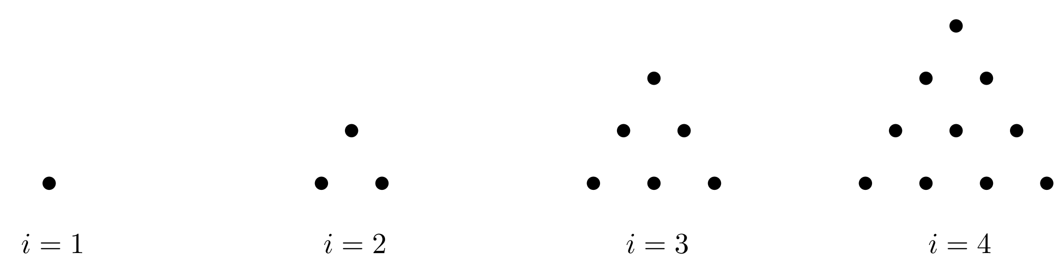


Abbildung 4.1: Die ersten Dreieckszahlen.

Die ersten Dreieckszahlen lauten also 1, 3, 6, 10, … In Abbildung 4.2 ist der Fall $n = 5$ aufgezeichnet:

Die Konstruktion der größer werdenden n-Ecke verläuft dabei folgendermaßen: Ergänze die Seitenlänge des vorhandenen n-Ecks um eins und vervollständige das n-Eck, sodass alle Seiten gleich viele Punkte enthalten. In Formeln lautet das:

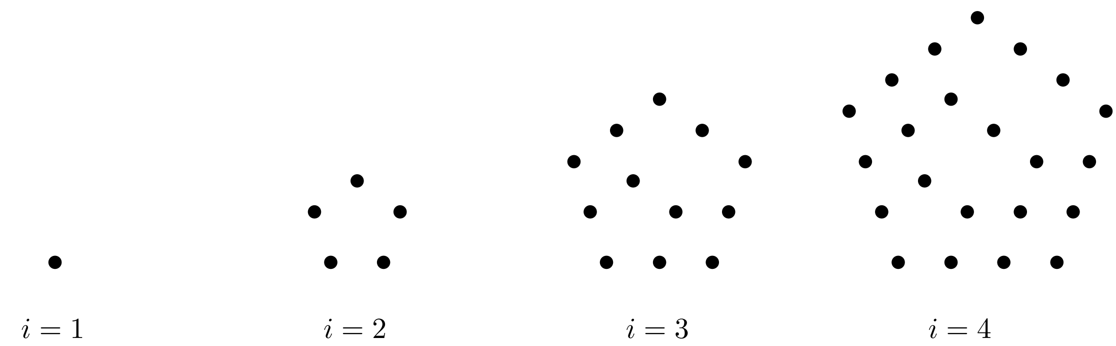


Abbildung 4.2: Die ersten Fünfeckszahlen.

Definition 4.22 Sei n eine natürliche Zahl.
Die Zahl $d = n-2$ heißt *Differenzzahl* zu n. Die Zahlenfolge x_i, die folgende Bedingungen erfüllt, heißt *Zahlenfolge der n-Eckszahlen*:

(i) $x_0 = 0$, $x_1 = 1$,

(ii) $x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} + d$.

Die komplizierte zweite Bedingung beschreibt gerade den folgenden Sachverhalt aus den Bildern: In einem Schritt werden neue Punkte hinzugefügt, und zwar gerade so viele Punkte mehr als im vorigen Schritt, wie es Seiten gibt, die nicht links oder unten im n-Eck sind. Das sind gerade $n-2$ Seiten.

Satz 4.23 (a) Die n-Eckszahlen sind durch die rekursive Formel

$$\begin{aligned} &x_0 = 0, x_1 = 1; \\ &x_i = 2x_{i-1} - x_{i-2} + n - 2 \text{ für } i \geq 2 \end{aligned} \tag{4.6}$$

gegeben.

(b) Die n-Eckszahlen sind durch die explizite Formel

$$x_i = \frac{(n-2)i^2 - (n-4)i}{2} \tag{4.7}$$

gegeben.

Beweis. (a) Lösen wir Bedingung (ii) aus Definition 4.22 nach x_{i+1} auf, so erhalten wir

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} + d$$

und durch Einsetzen von $d = n-2$ und Verschiebung des Indexes $i+1 \mapsto i$ erhalten wir die behauptete Rekursionsformel 4.6. Die Anfangsbedingungen gelten wegen Bedingung (i) aus Definition 4.22.

(b) Wir bemerken zunächst, dass nach (ii) aus Definition 4.22 gilt:

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 &= 1, \\ x_2 - x_1 &= x_1 - x_0 + d = 1 + d, \\ x_3 - x_2 &= x_2 - x_1 + d = 1 + 2d, \\ &\dots \\ x_i - x_{i-1} &= 1 + (i-1)d. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Folglich

$$\begin{aligned} x_i &= (x_i - x_{i-1}) + (x_{i-1} - x_{i-2}) + \dots + (x_2 - x_1) + (x_1 - x_0) + x_0 \\ &= (1 + (i-1)d) + (1 + (i-2)d) + (1 + (i-3)d) + \dots \\ &\quad + (1 + d) + 1 + 0 \qquad \text{(nach Gleichung 4.8)} \\ &= i + ((i-1) + (i-2) + \dots + 2 + 1)d \\ &= i + \frac{(i-1)i}{2}d \\ &= i + \frac{(i-1)i}{2}(n-2) \\ &= \frac{(n-2)i^2 - (n-4)i}{2}. \end{aligned}$$

$\square$

4.4.2 Kettenbrüche

Definition 4.24

(a) Ein *endlicher Kettenbruch* ist ein Term der Form

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}, \tag{4.9}$$

wobei a_0, a_1, …, a_n rationale Zahlen sind. Wir schreiben dafür auch

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]. \tag{4.10}$$

(b) Ein *unendlicher Kettenbruch* ist ein Ausdruck der Form

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\vdots}}}, \tag{4.11}$$

wobei a_0, a_1, … eine (unendliche) Folge rationaler Zahlen ist. Wir schreiben dafür auch

$$[a_0; a_1, a_2, \dots]. \tag{4.12}$$

(c) Ein unendlicher Kettenbruch heißt *periodisch*, falls sich von einem Index an eine Sequenz in den Koeffizienten unendlich oft wiederholt.

Bemerkung:

Ein endlicher Kettenbruch ist für alle Wahlen von a_0, a_1, …, a_n eine rationale Zahl. Ein unendlicher Kettenbruch ist im Allgemeinen *keine* rationale Zahl. Für ungünstige Wahlen von a_0, a_1, … kann der Ausdruck in Zeile 4.11 zum Beispiel beliebig groß werden.

Falls man mathematisch exakt sein möchte, dann betrachtet man den Grenzwert der Folge

$$\begin{aligned}
k_0 &= a_0,\\
k_1 &= a_0 + \frac{1}{a_1},\\
k_2 &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}},\\
k_3 &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}},\\
&\dots
\end{aligned}$$

Im Falle, dass dieser Grenzwert existiert und nicht unendlich ist, kann man auf ihn die üblichen arithmetischen Operationen anwenden. Das rechtfertigt die Rechnung mit unendlichen Kettenbrüchen, falls sie einen endlichen Wert haben. In allen Beispielen und Aufgaben treten nur

Kettenbrüche auf, deren Wert wohldefiniert ist, und man kann daher naiv mit den Brüchen rechnen. Eine mathematisch exakte Behandlung von Kettenbrüchen benötigt den Grenzwertbegriff, ist nicht für die Doppeljahrgangsstufe 7/8 geeignet und wird daher hier weggelassen.

Verfahren 4.25 Berechnung periodischer Kettenbrüche (Beispiel $K = [3; 7, 2, 2, 2, 2, \dots]$).

(i) Spalte den Kettenbruch auf in periodischen Teil und nicht-periodischen Teil:

$$\begin{aligned} \text{periodisch} &= K_1 = [0; 2, 2, 2, 2, 2, \dots], \\ \text{nicht-periodisch} &= K_2 = [3; 7], \\ \Rightarrow K &= [3; 7, K_1]. \end{aligned}$$

(ii) Drücke den periodischen Teil durch sich selbst als nicht-periodischen Kettenbruch aus:

$$K_1 = \cfrac{1}{2 + \underbrace{\boxed{\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}_{=K_1}} = \frac{1}{2 + K_1}.$$

(iii) Löse die entstandene Gleichung nach dem periodischen Anteil:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2 + K_1} \\ \Rightarrow \quad K_1 \cdot (2 + K_1) &= 1 \\ \Rightarrow \quad K_1^2 + 2K_1 + 1 = (K_1 + 1)^2 &= 2 \\ \Rightarrow \quad K_1 + 1 &= \pm\sqrt{2} \\ \Rightarrow \quad K_1 &= 1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow K_1 = 1 + \sqrt{2}, \text{ weil } K_1 > 0. \end{aligned}$$

(iv) Setze in den nicht-periodischen Ausdruck vom Anfang ein:

$$K = [3; 7, K_1] = 3 + \frac{1}{7 + 1 + \sqrt{2}}.$$

Mit diesem Verfahren können wir jeden periodischen Kettenbruch

4.4.3 Die Fibonaccizahlen und der goldene Schnitt

Definition 4.26 Die Folge der *Fibonaccizahlen* ist die folgende, rekursiv definierte Zahlenfolge:

$$\begin{aligned} &F_0 = 0, F_1 = 1; \\ &F_i = F_{i-1} + F_{i-2} \text{ für } i \geq 2. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Die ersten Folgenglieder der Zahlenfolge lauten 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Definition 4.27 Seien a, b rationale Zahlen mit $a > b$. a und b stehen *im Verhältnis des goldenen Schnitts* zueinander, wenn

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}. \tag{4.14}$$

Falls $b = 1$, so heißt a *Goldene-Schnitt-Zahl* (oder auch nur *goldener Schnitt*). Wir schreiben für diese Zahl Φ.

Satz 4.28 (Eigenschaften von Φ) (a) Φ existiert und es gilt

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{4.15}$$

(b) Φ löst die Gleichung $0 = x^2 - x - 1$.

Beweis. (a) Wir müssen zeigen, dass für $b = 1$ eine Zahl a existiert, die Gleichung 4.14 löst.

$$\begin{aligned} && \frac{a}{1} &= \frac{a+1}{a} \\ \Rightarrow && a^2 &= a+1 \\ \Rightarrow && 0 &= a^2 - a + \frac{1}{4} - \frac{5}{4} \\ \Rightarrow && \frac{5}{4} &= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \\ \Rightarrow && a &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}, \end{aligned} \tag{4.16}$$

und weil nach Voraussetzung $a \geq 1$, ist $a = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(b) Dies wurde bereits in Teil (a) gezeigt, siehe Gleichung 4.16. □

Satz 4.29 (a) Für das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Fibonaccizahlen gilt

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = [1;\ \underbrace{1,\ldots,1}_{(n-1)\text{ Einsen}}\ ]. \tag{4.17}$$

(b) Das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Fibonaccizahlen nähert sich Φ an.

Beweis. (a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{F_{n+1}}{F_n} &= \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} &&= \left[1; \frac{F_n}{F_{n-1}}\right] \\
&= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{F_{n-2}}{F_{n-1}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{F_{n-1}}{F_{n-2}}}} &&= \left[1; 1, \frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}\right] \\
&= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{F_{n-3}}{F_{n-2}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{F_{n-2}}{F_{n-3}}}}} &&= \left[1; 1, 1, \frac{F_{n-2}}{F_{n-3}}\right] \\
&= \ldots \\
&= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{1 + \cfrac{F_1}{F_2}}}}} &&= \Bigg[1;\ \underbrace{1, 1, \ldots, 1, 1}_{\substack{\text{nach } (n-2) \text{ Schrit-} \\ \text{ten } (n-2) \text{ Einsen}}},\ \frac{F_2}{F_1}\Bigg] \\
&= [1;\ \underbrace{1,\ldots,1}_{(n-1)\text{ Einsen}}\ ].
\end{aligned}$$

(b) Nach Aufgabe 4.12., in der man das Verfahren 4.25 benutzt, gilt $[1; 1, 1, \ldots] = \Phi$. Weil sich $[1;\ \underbrace{1,\ldots,1}_{(n-1)\text{ Einsen}}\ ]$ an $[1; 1, 1, \ldots]$ annähert, nähert sich auch $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ and Φ an. □

4.5 Aufgaben

4.1. (a) Der letzte Teil von 4.11 ist auch für den Modul $m = 0$ sinnvoll. Welche Zahlen sind entsprechend dieser Definition dann äquivalent zueinander?

(b) Welche Zahlen sind äquivalent modulo 1 zueinander?

4.2. (a) Auf welche Ziffer endet die Zahl 3^{100}?

(b) Welchen Rest lässt 2017^{500} bei Division durch 101?

Hinweis: Kleiner Satz von Fermat.

(c) Wie lauten die letzten drei Ziffern der Zahl 2017^{2017}?

4.3. Zeige, dass die Voraussetzung $\mathrm{ggT}(c, m) = 1$ aus Satz 4.14 notwendig für die Implikation ist. (D.h. gib ein Beispiel an, in dem $\mathrm{ggT}(c, m) = 1$ und die Behauptung aus dem Satz nicht gelten)

4.4. (a) Zeige die folgende Teilbarkeitsregel in Analogie zu Satz 4.16:

Streicht man von einer Zahl die letzte Ziffer und addiert das Vierfache der weggestrichenen Ziffer zur übrigen Zahl hinzu, so ist das Ergebnis genau dann durch 13 teilbar, wenn die ursprüngliche Zahl durch 13 teilbar war.

(b) Formuliere eine analoge Teilbarkeitsregel für die Teilbarkeit durch 17 und beweise sie.

4.5. Definiere eine Zahlenfolge, indem in jedem Schritt die vorhergehende Zahl verdoppelt und um 1 erhöht wird, beginnend mit einer natürlichen Zahl p. Gibt es ein p derart, dass die Zahlenfolge nur Primzahlen enthält?

Hinweis: Kleiner Satz von Fermat.

4.6. Benutze den kleinen Satz von Fermat (Satz 4.17), um die folgende Aussage zu beweisen:

Satz 4.30 (Eulers Korollar) Seien p und q voneinander verschiedene Primzahlen. Dann gilt für jede ganze Zahl a, die nicht von p oder q geteilt wird

$$a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \pmod{pq}.$$

Wende dazu den kleinen Satz von Fermat auf a^{p-1} und q an.

Hinweis: Der Beweis für die Korrektheit der RSA-Verschlüsselung benutzt dieses Korollar.

4.7. Finde alle ganzen Zahlen x, für die gilt

$$x + 1 \equiv x \cdot 2 \pmod 3.$$

4.8. Beweise, dass die folgende Aussage für alle ganzen Zahlen x und y wahr ist:

$$xy \equiv x^2 \pmod{(x - y)}.$$

4.9. Sei x eine beliebige ganze Zahl. zeige, dass x^2 bei Division durch 3 entweder den Rest 0 oder den Rest 1 lässt.

4.10. Zeige: Jede Sechseckszahl ist auch eine Dreieckszahl.

Hinweis: Schreibt man die ersten Dreieckszahlen und Sechseckszahlen auf, so kann man raten: "Die i-te Sechseckszahl ist die $(2i - 1)$-te Dreieckszahl." Benutze dann Gleichung 4.7, um deine Vermutung zu überprüfen.

4.11. Zeige, dass die Viereckszahlen auch wirklich Quadratzahlen im herkömmlichen Sinne sind. Das heißt: Zeige, dass für jede Viereckszahl x eine natürliche Zahl $y \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $x = y^2$.

4.12. (a) Zeige $[1; 1, 1, 1, \dots] = \Phi$.

(b) Berechne den Wert des periodischen Kettenbruchs $[1; 3, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, \dots]$.

4.13. Zeige: zwei aufeinanderfolgende Fibonaccizahlen sind teilerfremd.

Hinweis: Angenommen, F_{n+1} und F_n sind nich teilerfremd, was weiß man dann über F_n und F_{n-1}? Wiederhole das Argument, bis du bei F_1 und F_0 ankommst.

Hinweis: Es gilt sogar die folgende Verallgemeinerung:

$$\mathrm{ggT}(F_n, F_m) = F_{\mathrm{ggT}(n,m)}.$$

4.14. Zeige:

$$F_0 1 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Hinweis: Stelle F_{n+2} als Teleskopsumme dar.

4.15. *Vortragsthema: Fundamentalsatz der Arithmetik.* Beweise Satz 4.4.

4.16. *Vortragsthema: RSA-Verschlüsselung.* Die RSA-Verschlüsselung ist eine moderne Verschlüsselungstechnik, die derzeit häufig zur Verschlüsselung von E-Mailkommunikation eingesetzt wird. Erkläre, wie ein Unbeteiligter den öffentlichen Schlüssel benutzt, um eine verschlüsselte Nachricht zu erstellen, und erkläre, wie der Geheimnisträger den privaten Schlüssel benutzt, um die verschlüsselte Nachricht zu entschlüsseln. Warum funktioniert das Verfahren? D.h. warum erhält man die originale Nachricht?

4.17. *Vortragsthema: Tetraederzahlen.* Bei den n-Eckszahlen aus Abschnitt 4.4.1 wurden Punkte von n-Ecken in der Ebene gezählt. Führe die Konstruktion für Tetraeder im dreidimensionalen Raum aus und gib eine explizite Formel für die Folgenglieder an. Die ersten Folgenglieder lauten 1, 4, 10, 19, 31, ...

4.18. *Vortragsthema: Kettenwurzeln.* In Abschnitt 4.4.2 werden Kettenbrüche behandelt. Mit analogen Methoden kann man auch Kettenwurzeln behandeln. Berechne den Wert der Kettenwurzel $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$ und gib ein Verfahren für die Berechnung des Wertes einer beliebigen periodischen Kettenwurzel an.

4.19. *Vortragsthema: Verallgemeinerungen der Fibonaccizahlen.* Betrachte eine der Verallgemeinerungen der Fibonaccizahlen, zum Beispiel die *Lucas-Zahlen* oder die *Tribonaccizahlen*. Es bietet sich zum Beispiel an, den Grenzwert für den Quotienten zweier aufeinanderfolgender Lucas-Zahlen mit der Kettenbruch-Methode zu berechnen.

4.20. Aufgaben der Mathematik-Olympiade zum Thema *Teilbarkeit*: 540733, 540723, 520724, 510724, 500732, 490724, 490714, 480714, 460714, 440736, 420712, 410724, 400735, 400722, 350712, 540846, 520842, 520844, 520833, 500844, 460846, 460813, 450845, 440844, 440814, 430814, 410845, 410824, 400814, 380832, 370841, 360845, 360832, 350835, 350814

Aufgaben der Mathematik-Olympiade zum Thema *Zahlenfolgen*: 530736, 530724, 530714, 520734, 500734, 490735, 450736, 450722, 450714, 530833, 530824, 530814, 510842, 490814, 480846, 470843, 470845, 470833, 470824, 450843, 440824, 420814, 370834, 370823

5. Kombinatorische Spieltheorie

Die kombinatorische Spieltheorie beschäftigt sich mit Spielen, in denen kein Zufall vorkommt, zwei Spieler abwechselnd Spielzüge machen und in denen alle Informationen für alle Spieler offen sind. Zum Beispiel fallen die Spiele Schach und Go in diese Kategorie und die Spiele Würfeln, Poker und Fußball nicht.

Die Frage ist üblicherweise, welcher der beiden Spieler eine Gewinnstrategie hat. Das heißt: Welcher Spieler kann gewinnen, wenn er sich nur geschickt genug anstellt, egal wie schlau der andere Spieler spielt? Man darf sich hierbei nie darauf verlassen, dass der Gegner einen Fehler macht, sondern muss immer auf alles vorbereitet sein.

5.1 Klein anfangen

Wir betrachten nun das erste Beispiel eines kombinatorischen Spiels.

Spiel 5.1 (Nim) Die Spieler A und B spielen gegeneinander. Sie machen abwechselnd Spielzüge, wobei A beginnt. Derjenige Spieler, der zuerst keinen Spielzug mehr ausführen kann, verliert.
Gegeben ist ein Haufen mit 100 Steinen. In einem Zug darf ein Spieler zwischen 1 und 9 Steinen vom Haufen entfernen.

Satz 5.2 Beim Spiel 5.1 hat Spieler A eine Gewinnstrategie.

Beweis. Wir beschreiben die Gewinnstrategie für Spieler A explizit:

- Im ersten Zug muss A einen Stein vom Haufen entfernen.
- Nimmt B daraufhin x Steine in seinem Zug, so nimmt A in seinem Zug $11-x$ Steine. Dies wird so lange wiederholt, bis das Spiel endet.

Wenn A diese Strategie anwendet, so muss er gewinnen, egal was B tut. Der Grund dafür ist: Am Ende jedes Zuges von A liegt auf dem Haufen eine durch 11 teilbare Anzahl von Steinen. Während des Spiels werden die Zahlen 99, 88, 77, ... durchlaufen, bis man am Ende bei 0 ankommt.

D.h. veranschaulicht:

$$
\begin{aligned}
100 \stackrel{A}{\to} 99 \stackrel{B}{\to} 89 \text{ bis } 98 \stackrel{A}{\to} 88 \stackrel{B}{\to} 78 \text{ bis } 87 \ldots \\
\stackrel{A}{\to} 22 \stackrel{B}{\to} 12 \text{ bis } 21 \stackrel{A}{\to} 11 \stackrel{B}{\to} 1 \text{ bis } 10 \stackrel{A}{\to} 0.
\end{aligned}
$$

$\square$

Wenn man die Lösung so aufgeschrieben sieht, leuchtet es ein, dass sich B noch so sehr anstrengen kann, aber einfach nicht gewinnen wird, solange A keinen Fehler macht. Doch wie kommt man auf diese Lösung?

Die Antwort hier lautet: *Klein anfangen!* Wir möchten zwar etwas über das Spiel mit 100 Steinen wissen, aber es ist hilfreich, erstmal mit kleinen Zahlen anzufangen.

Angenommen, man fängt mit 10 Steinen anstelle von 100 an. Dann gibt es gar nichts nachzudenken, sondern A nimmt einfach im ersten Zug alle Steine und gewinnt – so weit, so gut.

Wie ist es mit 11 Steinen? Schon etwas komplizierter. Wir merken: Egal, wie viele Steine A nimmt, B kann immer alle verbleibenden Steine nehmen und damit gewinnen. Man müsste es also irgendwie schaffen, dass der Gegner bei 11 Steinen landet...

Das geht natürlich, wenn wir mit 12 bis 21 Steinen starten! In diesen Fällen kann A auf 11 Steine reduzieren und B die Verluststellung vorsetzen. Also sind Stellungen mit 12 bis 21 Steinen gewonnen.

Kritisch wird es nur bei 22 Steinen: Egal, wie viele Steine A nimmt, er wird seinem Gegner immer eine der Gewinnstellungen von 12 bis 21 Steinen präsentieren. Also hätte man in diesem Fall verloren...

Und so erkennt man dann das Muster, dass die durch 11 teilbaren Zahlen eine Sonderrolle einnehmen.

5.2 Das Symmetrieprinzip

Mit dem *Symmetrieprinzip* kann es in manchen Fällen sehr leicht sein, eine Gewinnstrategie für den zweiten Spieler anzugeben. Falls das Spiel nämlich eine Symmetrie hat, so kann der zweite Spieler einfach jeden Zug des anderen Spielers kopieren, und gewinnt am Ende, weil er den letzten Zug macht.

Wie das genau zu verstehen ist, veranschaulicht das folgende Beispiel:

Spiel 5.3 (x,y-Haufen) Die Spieler A und B spielen gegeneinander. Sie machen abwechselnd Spielzüge, wobei A beginnt. Derjenige Spieler, der zuerst keinen Spielzug mehr ausführen kann, verliert.
Gegeben ist ein Haufen mit x Steinen und ein zweiter Haufen mit y Steinen, wobei x und y natürliche Zahlen sind. In einem Spielzug darf ein Spieler beliebig viele Steine von einem der beiden Haufen entfernen.

Satz 5.4 Falls im Spiel 5.3 $x = y$ ist, so hat B eine Gewinnstrategie. Falls $x \neq y$ ist, so hat A eine Gewinnstrategie.

Beweis.

- Wir betrachten zuerst den Fall $x = y$:

  B muss immer den Zug von A auf dem jeweils anderen Haufen ausführen. Nach jedem Zug von B liegen dann auf beiden Haufen gleich viele Steine. Früher oder später muss A den letzten Stein eines Haufens nehmen und B nimmt dann den letzten Stein des anderen Haufens.

  Wir veranschaulichen ein Spiel mit $x = y = 10$:

$$\begin{aligned}(10,10) &\overset{A}{\to} (6,10) \overset{B}{\to} (6,6) \overset{A}{\to} (6,5) \overset{B}{\to} (5,5)\\ &\overset{A}{\to} (2,5) \overset{B}{\to} (2,2) \overset{A}{\to} (2,1) \overset{B}{\to} (1,1)\\ &\overset{A}{\to} (0,1) \overset{B}{\to} (0,0).\end{aligned}$$

- Im Fall $x \neq y$:

  Im ersten Zug kann A so viele Steine vom größeren Haufen wegnehmen, dass beide Haufen gleich viele Steine enthalten. Dann kann A die o.g. Strategie anwenden.

□

In dem Fall war die Symmetrie offensichtlich, weil das Spielfeld bereits in zwei Teile geteilt war. Meistens ist das aber nicht der Fall. Entweder erkennt man geschickt, dass von Anfang an eine Symmetrie vorliegt, das kann B dann ausnutzen, um die Züge von A zu kopieren. Oft kann aber auch A im ersten Zug das Spielfeld in zwei symmetrische Teile zerlegen und dann die Züge von B zu kopieren. Beispiele für beide Fälle finden sich in den Aufgaben.

5.3 Zugbäume

Manche Spiele haben keine Symmetrie oder zumindest keine offensichtliche Symmetrie. Das Prinzip *klein anfangen* ist zwar immer noch hilfreich, um eine Idee dafür zu bekommen, wer eine Gewinnstrategie hat, doch am Ende führt manchmal kein Weg daran vorbei, für *jeden möglichen Zug* des einen Spielers die perfekte Antwort des anderen Spielers anzugeben. Dabei kann man sich oft Arbeit ersparen, indem man bemerkt, dass die gleiche Spielstellung auf mehreren Wegen erreicht werden kann, aber nur einmal notiert werden muss. Wir veranschaulichen das am folgenden Beispiel:

Spiel 5.5 (Cutcake) Die Spieler H und V spielen gegeneinander. Sie machen abwechselnd Spielzüge, wobei V beginnt. Derjenige Spieler, der zuerst keinen Spielzug mehr ausführen kann, verliert.
Gegeben ist ein Kuchen auf dem 3 Zeilen und 4 Spalten markiert wurden. In einem Zug darf V ein Kuchenstück nehmen und dieses durch einen vertikalen Schnitt entlang einer Linie teilen. (Am Anfang gibt es nur ein Kuchenstück, nämlich den ganzen Kuchen. Nach dem ersten Schnitt gibt es zwei Stücke) H hingegen darf ein Stück durch einen horizontalen Schnitt teilen.

In Abbildung 5.1 ist ein möglicher Spielverlauf abgebildet.

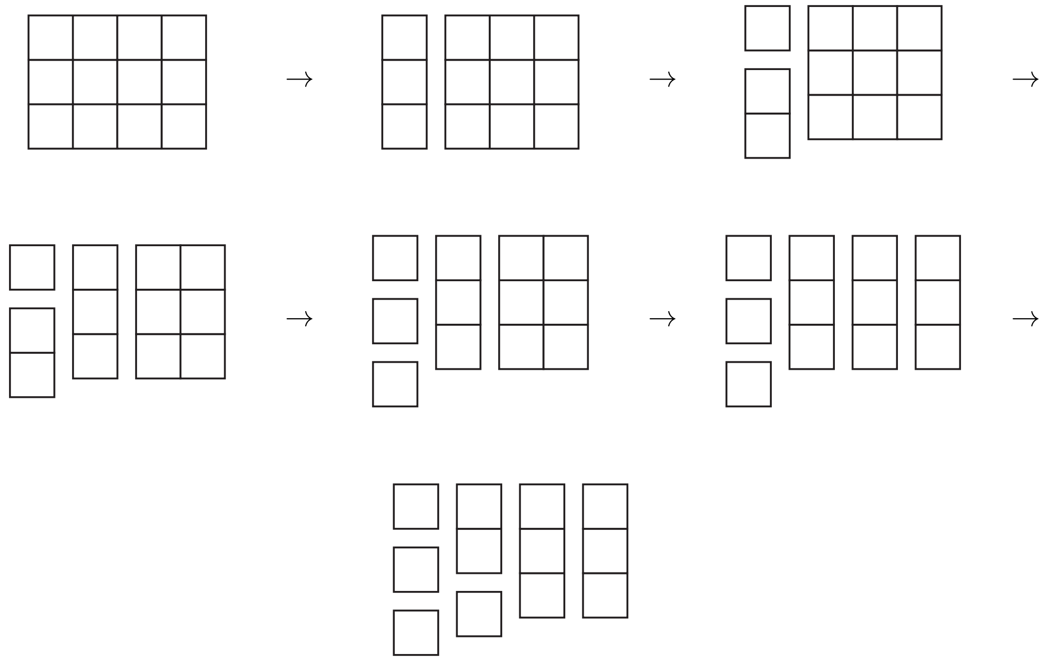


Abbildung 5.1: Ein möglicher Spielverlauf für das Spiel Cutcake

Und an dieser Stelle hat H das Spiel gewonnen, weil er den letzten Zug gemacht hat und V kein Zug mehr bleibt.

Satz 5.6 Im Spiel 5.5 hat V eine Gewinnstrategie.

Beweis. Wir geben einen Zugbaum an, der den ersten Zug von V angibt und daraufhin für jede Möglichkeit von H eine Antwort angibt, die zum Gewinn führt. Der Zugbaum ist in Abbildung 5.2 dargestellt.

Bemerke: Beim ersten Zug von H gibt es nur eine Möglichkeit. Alle anderen Züge gehen aus diesem durch Umlegen der Kuchenstücke hervor. Ebenso beim letzten Zug von H im linken Teilbaum.

In den beiden Stellungen rechts unten und links unten am Ende des Baums kann V das Symmetrieprinzip anwenden und daher gewinnen.

Weitere Zugmöglichkeiten für V müssen nicht betrachtet werden, weil es genügt, *eine* Strategie anzugeben, die zum Gewinn führt. (Es gibt allerdings weitere Möglichkeiten, mit denen V ebenso gewinnen wird) $\square$

5.4 Strategieklau

Bisher haben wir für mehrere Spiele gezeigt, dass einer der beiden Spieler den Sieg erzwingen kann, indem wir explizit eine Gewinnstrategie für ihn angegeben haben. Das *Strategieklau*-Argument ist eine Beweistechnik, mit der man für einige Spiele prüfen kann, welcher der Spieler eine Gewinnstrategie hat, ohne diese exakt anzugeben.

Wir betrachten dazu ein Beispiel:

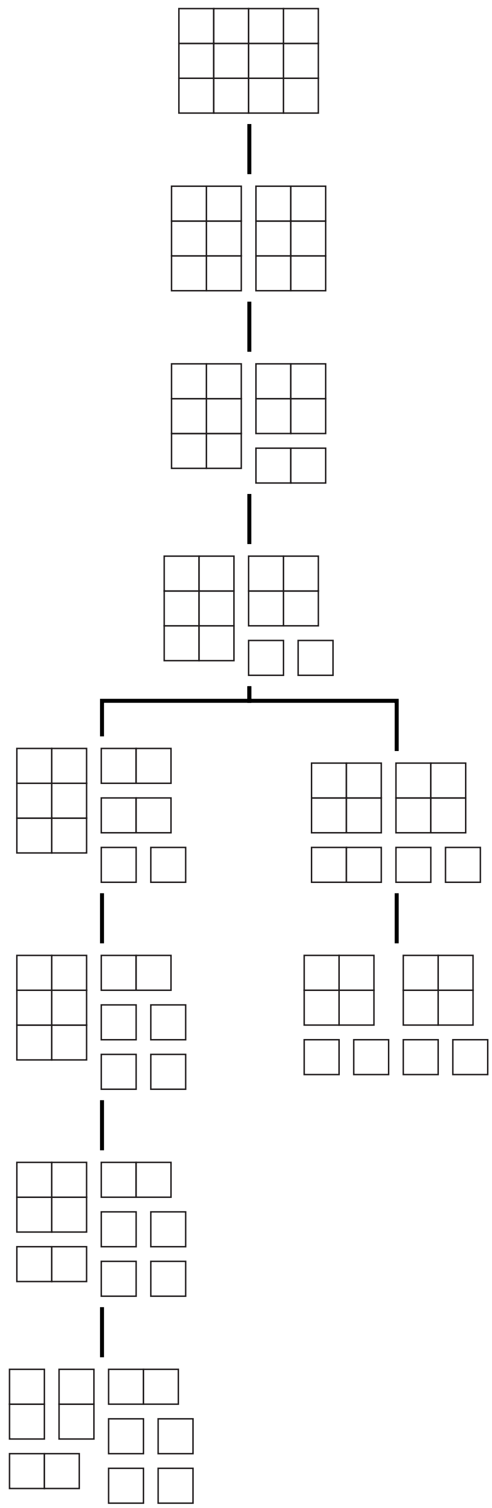


Abbildung 5.2: Ein Zugbaum für Spiel 5.5.

Spiel 5.7 (Chomp) Die Spieler A und B spielen gegeneinander und führen abwechselnd Züge aus.
Kleine Quadrate sind in m Reihen und n Spalten zu einem Rechteck angeordnet, wobei m und n natürliche Zahlen sind. In einem Zug kann ein Spieler ein Rechteck von Quadraten aus dem Spielfeld entfernen. Das zu entfernende Rechteck muss dabei immer einen Eckpunkt in der ganz rechten unteren Ecke des Spielfeldes haben (auch wenn das Quadrat in der rechten underen Ecke bereit entfernt wurde). Derjenige Spieler, der die linke obere Ecke entfernt, verliert das Spiel.

Abbildung 5.3 zeigt zum Beispiel das Spielfeld für den Fall $m = 3$ und $n = 4$.

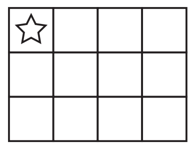
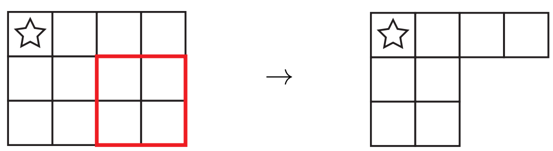


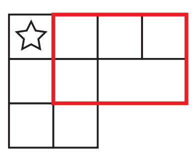
Abbildung 5.3: Spielfeld der Größe 3×4 für das Spiel Chomp.

Das Spiel stellt eine Vollmilch-Schokoladentafel dar, in der durch einen Fabrikationsfehler eine Ecke Zartbitter-Schokolade in der linken oberen Ecke platziert wurde. Die Spieler brechen nun Stücke der Vollmilch-Schokolade ab, die sie essen, und es verliert derjenige Spieler, der das lezte Stück essen muss.

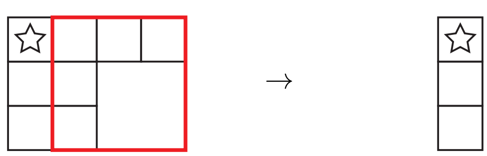
A könnte zum Beispiel im ersten Zug ein 2×2-Quadrat rechts unten entfernen:



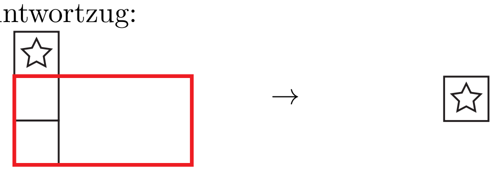
Folgender Zug ist nun *nicht* erlaubt für B, weil das von ihm zu entfernende Rechteck nicht in der ganz rechten unteren Ecke des Spielfeldes endet:



Ein legaler Zug wäre zum Beispiel der folgende:



Daraufhin hätte A den Antwortzug:



Und damit hätte A das Spiel gewonnen, weil B nichts anderes mehr übrig bleibt, als das Zartbitter-Stück zu essen.

Satz 5.8 In Spiel 5.7 hat Spieler A eine Gewinnstrategie, falls die Spielfeldgröße nicht 1×1 ist.

Beweis. Wir benutzen das Strategieklau-Argument. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle:

- Fall 1: Angenommen, der Startzug, in dem A nur ein Quadrat ganz rechts unten nimmt, ist ein Gewinnzug.

  Das heißt, nach diesem Zug ist die Stellung für B verloren. Dann hat A offensichtlich eine Gewinnstrategie, nämlich genau diese, die mit dem o.g. ersten Zug beginnt.

- Fall 2: Angenommen, der Startzug, in dem A nur ein Quadrat ganz rechts unten nimmt, ist kein Gewinnzug.

  Das heißt, nachdem A diesen ersten Zug macht, ist die Stellung für B gewonnen. B hat also in dieser Stellung Gewinnstrategie. B kann also in dieser Stellung einen bestimmten Zug spielen, der eine für A verlorene Stellung herbeiführt.

  Allerdings: A hätte genau diesen Zug ja auch als allerersten Zug spielen können und damit eine für B verlorene Stellung herbeiführen können.

Also hat A in beiden Fällen eine Gewinnstrategie. Weitere Fälle kann es nicht geben, also hat A immer eine Gewinnstrategie. □

An dieser Stelle sei nochmal bemerkt, dass dieser Beweis überhaupt keine Aussage darüber macht, wie A nun tatsächlich gewinnen kann. In den meisten Fällen wird die Strategie, im ersten Zug ein einzelnes Quadrat rechts unten zu nehmen, nicht zum Erfolg führen.

5.5 Aufgaben

5.1. Betrachte das veränderte Nim-Spiel, bei dem der Haufen anfangs aus n Steinen besteht und jeder Spieler in einem Zug bis zu k Steine nehmen darf. k und n sollen dabei natürliche Zahlen sein, die vor Spielbeginn festgelegt werden.

Welcher Spieler hat hier eine Gewinnstrategie?

5.2. Wir ändern das Nim-Spiel 5.1, sodass derjenige Spieler verliert, der den letzten Stein nimmt. Das heißt, wir betrachten das folgende Spiel:

> **Spiel 5.9** (Misère-Nim) Die Spieler A und B spielen gegeneinander. Sie machen abwechselnd Spielzüge, wobei A beginnt. Derjenige Spieler, der zuerst keinen Spielzug mehr ausführen kann, *gewinnt.*
> Gegeben ist ein Haufen mit 100 Steinen. In einem Zug darf ein Spieler zwischen 1 und 10 Steinen vom Haufen entfernen.

Hinweis: Zu fast allen von uns betrachteten Spielen kann man die Misère-Version betrachten. Manchmal ist die Analyse der Misère-Version ähnlich zur Analyse der normalen Version, wie in diesem Fall. Manchmal fällt die Analyse aber auch sehr viel schwerer, wie zum Beispiel beim Spiel Sprouts*, das später behandelt wird.*

5.3. Betrachte das folgende Spiel:

Spiel 5.10 (Klassiches Nim) Die Spieler A und B spielen gegeneinander. Sie machen abwechselnd Spielzüge, wobei A beginnt. Derjenige Spieler, der zuerst keinen Spielzug mehr ausführen kann, verliert.
Gegeben sind mehrere Haufen mit unterschiedlich vielen Steinen. In einem Spielzug darf ein Spieler von genau einem Haufen beliebig viele Steine entfernen. (Es gibt nur ganze Steine und es gibt keine negativen Steine)

Welcher Spieler hat hier eine Gewinnstrategie?

Hinweis: Stelle die Steinanzahlen auf den verschiedenen Haufen als Dualzahlen dar. Schreibe die Zahlen so untereinander, dass die Einerziffern untereinander stehen. Addiere alle Ziffern einer Spalte. Zeige: Wenn alle diese Summen gerade sind, so hat B eine Gewinnstrategie, andernfalls hat A eine Gewinnstrategie.

5.4. Betrachte das folgende Spiel:

Spiel 5.11 (Kayles) Die Spieler A und B spielen gegeneinander. Sie machen abwechselnd Spielzüge, wobei A beginnt. Derjenige Spieler, der zuerst keinen Spielzug mehr ausführen kann, verliert.
Gegeben sind 10 Kegel, die in einer Reihe aufgestellt sind. In jedem Zug darf ein Spieler einen einzelnen Kegel oder zwei nebeneinanderstehende Kegel entfernen. (Zwei Kegel stehen nebeneinander, wenn kein zwischen Ihnen stehender Kegel entfernt wurde. Also nicht über Lücken hinweg!)

Welcher Spieler hat hier eine Gewinnstrategie? Wie sieht es aus, wenn am Anfang n Kegel vorhanden sind und jeder Spieler pro Zug 1 bis k Kegel entfernen darf? n und k sollen dabei natürliche Zahlen sein, die vor Spielbeginn festgelegt werden.

5.5. Betrachte die folgende, Spiels Kayles 5.11: Die Kegel sind jetzt auf einer Kreislinie aufgestellt.

Welcher Spieler hat für den Fall, dass 10 Kegel vorhanden sind und Spieler 1 bis 2 Kegel entfernen dürfen, eine Gewinnstrategie? Und im allgemeinen Fall für zwei natürliche Zahlen n und k?

5.6. Gegeben ist ein reguläres 2504-Eck. Ernie und Bert zeichnen abwechselnd Diagonalen ein, wobei jedem nur dann erlaubt ist, zwei Eckpunkte zu verbinden, wenn die neue Diagonale keine der schon eingezeichneten schneidet. Ernie fängt an und derjenige, der nicht mehr ziehen kann, verliert. Wer kann den Sieg erzwingen?

5.7. Wir betrachten eine veränderte Version des Spiels Nim aus 5.1. Nun sind 100 Haufen mit je 100 Steinen gegeben und ein Spieler darf in einem Zug 1 bis 10 Steine von genau einem Haufen entfernen.

Welcher Spieler hat dann eine Gewinnstrategie?

5.8. Zeige: Beim Spiel Cutcake 5.5 hat V hat dann eine Gewinnstrategie, wenn auf einem sehr großen Kuchen der Breite 1000 und der Höhe 500 gespielt wird.

5.9. Betrachte das folgende Spiel:

Spiel 5.12 (Sprouts) Die Spieler A und B spielen gegeneinander. Sie machen abwechselnd Spielzüge, wobei A beginnt. Derjenige Spieler, der zuerst keinen Spielzug mehr ausführen kann, verliert.
Gegeben sind zwei Punkte auf einem Blatt Papier. In einem Spielzug muss ein Spieler zwei Punkte durch eine Linie verbinden, dabei sind auch krumme Linien erlaubt. Eine Linie darf allerdings keine bestehenden Linien kreuzen und auch nicht durch Punkte verlaufen. Eine Linie darf auch einen Punkt mit sich selbst verbinden. Auf die Linie wird dann ein neuer Punkt gemalt.
Ein Punkt, in den drei Linien münden, scheidet aus und darf nicht mehr mit neuen Linien verbunden werden.

Bemerkung: Bei dem Spiel soll es nicht um Zeichengenauigkeit gehen. Das heißt: Spieler dürfen Linien ein bisschen zur Seite schieben, damit sie ihre Verbindungslinie ohne Probleme zeichnen können.

(a) Zeige: Das Spiel ist *endlich*. Das heißt: Eine Partie kann nicht unendlich viele Züge lang dauern.

(b) Wie viele Spielzüge kann eine Partie mit n Startpunkten maximal haben? Welcher Spieler gewinnt, wenn wirklich die maximale Anzahl Züge gespielt wird?

(c) Benutze deine Überlegungen aus (b) um herauszufinden, welcher der beiden Spieler im Fall von zwei Startpunkten eine Gewinnstrategie hat.

5.10. Betrachte die *Misère-Version* des Spiels Sprouts. In diesem Spiel *verliert* derjenige Spieler, der den letzten Zug macht. Wer kann bei diesem Spiel (mit zwei Startpunkten) den Sieg erzwingen?

5.11. Gib eine explizite Gewinnstrategie für Spieler A für das Spiel Chomp auf folgenden Spielfeldern an:

(a) Ein quadratisches Spielfeld der Größe $n \times n$, wobei n eine natürliche Zahl ist.

(b) Ein Spielfeld der Größe $2 \times m$, wobei m eine natürliche Zahl ist.

(c) Das Spielfeld der Größe 3×4.

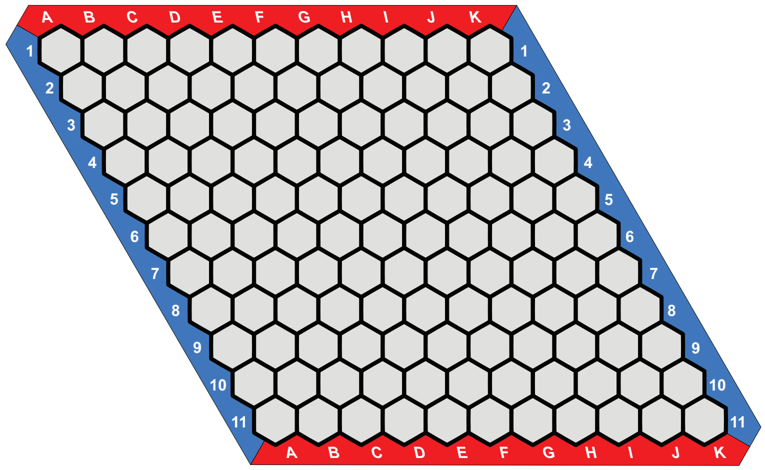
5.12. Betrachte die Misère-Version des Spiels Chomp. Dabei verliert derjenige Spieler, der den letzten möglichen Zug macht, der nicht die linke obere Ecke des Spielfeldes enthält. Welcher Spieler hat hier eine Gewinnstrategie?

5.13. Betrachte eine Modifikation des Spiels Schach: Dabei muss jeder Spieler in einem Zug zwei Züge hintereinander ausführen. Das Spielziel ist immer noch, den Gegner schachmatt zu setzen. Der König darf dabei nicht geschlagen werden. Remis soll bei diesem Spiel unmöglich sein, d.h. im Falle von Patt oder dreimaliger Stellungswiederholung verliert derjenige Spieler, der den letzten Zug gemacht hat.

Zeige: Der beginnende Spieler hat eine Gewinnstrategie.

5.14. Betrachte das folgende Spiel:

Spiel 5.13 (Hex) Die Spieler *Rot* und *Blau* spielen gegeneinander und führen abwechselnd Spielzüge aus, wobei *Rot* beginnt. Gespielt wird auf einem Spielfeld bestehend aus 11×11 Sechsecken, angeordnet in einer Rautenform.
In jedem Spielzug färbt ein Spieler eines des Rechtecke in seiner eigenen Farbe ein. Sobald ein durchgehender Weg von roten Sechsecken vom oberen zum unteren Spielfeldrand besteht, hat *Rot* gewonnen. Sobald ein durchgehender Weg von blauen Sechsecken vom linken zum rechten Spielfeldrand besteht, hat *Blau* gewonnen.



(a) Zeige: Das Spiel kann nicht unentschieden ausgehen.

(b) Zeige: *Rot* hat eine Gewinnstrategie.

5.15. *Vortragsthema: Sproutstheorie.* Stelle in einem Vortrag zusammen, was im Moment über das Spiel Sprouts und seine Misère-Version bekannt ist:

(a) Was ist die bisher unwiderlegte Vermutung, welcher der Spieler (in Abhängigkeit von der Anzahl von Startpunkten) eine Gewinnstrategie hat?

(b) Bis zu welcher Anzahl an Startpunkten wurde diese Vermutung überprüft?

(c) Sprouts wurde mit Computerhilfe analysiert. Wie werden Partien von Sprouts für den Computer lesbar notiert? [1]

5.16. *Vortragsthema: Eine allgemeine Strategie für Cutcake.* Betrachte folgende Faustregel für das Spiel Cutcake:

In jedem Zug muss der Spieler das kleinste vorhandene
Stück in zwei möglichst gleich große Stücke zerteilen.

Präzisiere diese Strategie. Welches genau ist *das kleinste Stück*? (Klein im Sinne von Fläche, oder Breite, oder ...?)

Zeige: Folgt ein Spieler dieser Strategie, so erreicht er immer das optimale Ergebnis. Das heißt: Falls der Spieler eine Gewinnstrategie hat, so ist sie gegeben durch diese Faustregel. Falls dieser Spieler keine Gewinnstrategie hat, so minimiert er zumindest den Rückstand auf den anderen Spieler.

Hinweis: Die Behauptung, dass diese Strategie wirklich optimal ist, ist eine unbewiesene

[1] Viele Informationen zum Thema finden sich auf der Website des *Weltverbandes für das Spiel Sprouts* unter `www.wgosa.org` (in englischer Sprache). Dort finden sich viele Beispielpartien und auch die Möglichkeit, eine Partie per E-Mail gegen den amtierenden Weltmeister zu spielen. Er akzeptiert alle Herausforderungen.

Vermutung. Es ist auch möglich, dass diese Strategie nicht optimal ist. In diesem Fall müsste man eine Beispielpartie angeben, in der ein Spieler mit einer anderen Strategie als der oben genannten ein besseres Ergebnis erzielen kann.

5.17. *Vortragsthema: John Forbes Nash.* Der Mathematiker Nash beschäftigte sich mit verschiedenen Aspekten der Spieltheorie. Er beschäftigte sich unter anderem im Detail mit dem oben betrachteten Spiel Hex. Im Vortrag könnte kurz die Person selbst und das Spiel Hex vorgestellt werden. Darüber hinaus bietet sich auch ein Exkurs in die allgemeine Spieltheorie an. Nash erhielt für seine Arbeit zum *Nash-Gleichgewicht* den Nobelpreis in Wirtschaftswissenschaften, das Konzept kann am Beispiel des Gefangenendilemmas erklärt werden.

5.18. *Vortragsthema: Grundy-Zahlen.* Jedes kombinatorische Spiel, das zusätzlich noch neutral ist, kann als Nim-Spiel betrachtet werden. Die Größe dieses Haufens heißt *Grundy-Zahl*. Das Ergebnis soll ohne Beweis erwähnt werden und an einem Beispiel soll eine Grundy-Zahl berechnet werden.

5.19. *Vortragsthema: Der Wert einer Stellung.* Es gibt ein sinnvolles Konzept, in einem kombinatorischen Spiel jeder Stellung einen Wert zuzuordnen. Wenn das geschehen ist, kann man Stellungen addieren und damit komplizierte Spiele in leicht zu analysierende Teilspiele zerlegen. Das kann am Beispiel Cutcake erläutert werden.

5.20. Aufgaben der Mathematik-Olympiade: 520711, 510714, 470724, 470714, 420813

6. Graphentheorie

6.1 Grundlegende Definitionen

Definition 6.1 Ein Bild aus Punkten, in dem jede Linie genau zwei Punkte miteinadner verbindet, heißt *Graph*. Die Linien werden auch *Kanten* genannt, die Punkte auch *Ecken*. Eine Kante heißt *Schlinge*, falls sie eine Ecke mit sich selbst verbindet.

In Abbildung 6.1 ist ein Graph mit einer Schlinge dargestellt und es wurden eine Ecke und eine Kante markiert.

Die Beispiele aus Abbildung 6.2. Im linken Beispiel gibt es eine Linie, die von einem Punkt aus ins Nichts zeigt, also nicht zwei Punkte miteinander verbindet. Im rechten Beispiel gibt es eine Linie, die drei Punkte miteinander verbindet.

Bemerkung:

Definition 6.1 ist mathematisch nicht präzise. (Was ist ein Bild? Was ist eine Linie?) Präzise kann man Graphen als ein Paar (E, V) definieren, wobei V als Elemente Mengen der Form $\{v_1, v_2\}$ mit v_1, $v_2 \in V$ enthält. Die zugehörige Zeichnung ist dann jene, in der man für jedes Element in V eine Ecke zeichnet und zwei Ecken x und y durch eine Kante verbindet, falls $\{x, y\} \in V$. Weil Mengenlehre allerdings kein Thema der Doppeljahrgangsstufe 7/8 ist, verwenden wir nur die anschauliche Definition 6.1.

Definition 6.2 Gegeben sei eine Ecke F in einem Graphen Γ. Der Grad von F ist die Anzahl von Kanten, die von F ausgehen, hierbei werden Schlingen doppelt gezählt. Wir schreiben für diese Zahl $\mathrm{Grad}(F)$.
Die Summe aller Eckengrade in einem Graphen heißt *Gesamtgrad des Graphen* und wir schreiben dafür $\mathrm{Grad}(\Gamma)$.

Im oben abgebildeten Beispielgraphen Γ gilt zum Beispiel für den Grad der markierten Ecke: $\mathrm{Grad}(\mathrm{Ecke}) = 2$ und für den Gesamtgrad des Graphen $\mathrm{Grad}(\Gamma) = 14$.

Satz 6.3 (Handshake-Lemma) Für jeden Graphen Γ ist $\mathrm{Grad}(\Gamma)$ eine gerade Zahl.

Beweis. Jede Kante erhöht die Eckengrade der angrenzenden Ecken jeweils um 1. Das heißt, jede Kante erhöht den Gesamtgrad des Graphen und 2. Das heißt, es gilt

$$\mathrm{Grad}(\Gamma) = 2 \cdot \#\{\text{Kanten von } \Gamma\}, \tag{6.1}$$

wobei die Schreibweise "$\#A$" für "Anzahl der Elemente in A" steht. Insbesondere ist also $\mathrm{Grad}(\Gamma)$ eine ganze Zahl. □

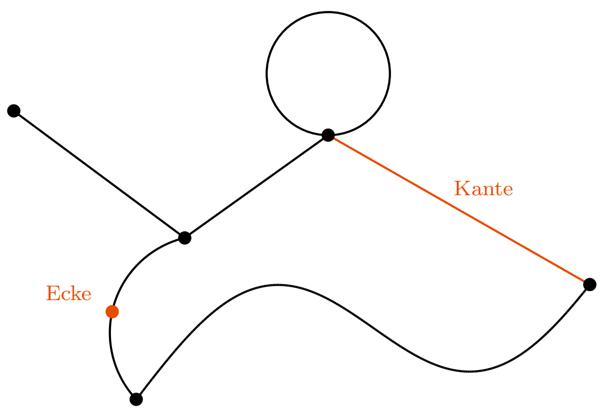


Abbildung 6.1: Beispiel für einen Graphen.

Abbildung 6.2: Gegenbeispiele zu Definition 6.1.

6.2 Eulerkreise und Eulerwege

Definition 6.4 (a) Ein *Kantenzug* ist eine Folge von Kanten $(k_1 k_2 k_3 \dots k_n)$ so, dass k_i und k_{i+1} einen gemeinsamen Punkt haben für alle $1 \leq i \leq n-1$.

(b) Ein Graph heißt *zusammenhängend*, falls je zwei beliebige Ecken durch einen Kantenzug miteinander verbunden sind.

In Abbildung 6.3 ist links ein Beispiel für einen nicht zusammenhängenden Graphen abgebildet. Zum Beispiel können dort die beiden rot gefärbten Punkte nicht durch einen Kantenzug verbunden werden. Der rechte Graph ist zusammenhängend.

Definition 6.5 (a) Ein Kantenzug in einem Graphen, der jede Kante genau einmal durchläuft, heißt *Eulerweg*.

(b) Ein Eulerweg, bei dem Start- und Endpunkt identisch sind, heißt *Eulerkreis*.

Nicht jeder Graph enthält einen Eulerweg und die natürliche Frage, welche Graphen einen Eulerweg enthalten, wird vom folgenden Satz beantwortet:

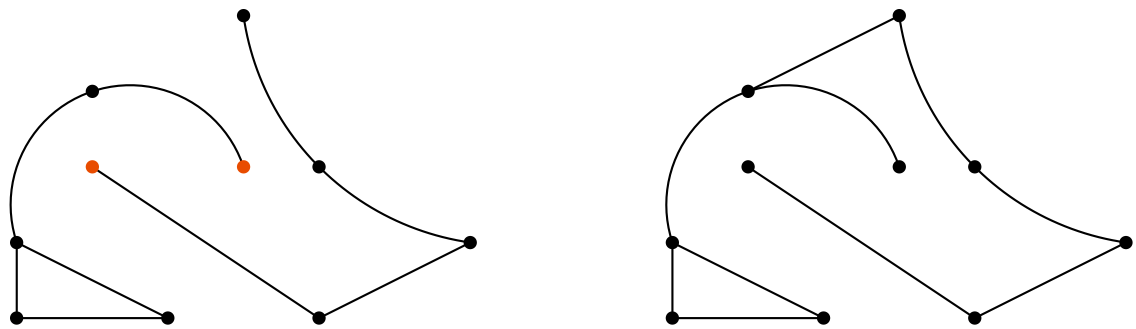


Abbildung 6.3: Beispiele für zusammenhängende und nicht zusammenhängende Graphen.

Satz 6.6 Sei Γ ein zusammenhängender Graph.

(a) Γ enthält genau dann einen Eulerkreis, falls alle Ecken in Γ geraden Eckengrad haben.

(b) Γ enthält genau dann einen Eulerweg, falls höchstens zwei Ecken in Γ ungeraden Eckengrad haben.

Beweis. (a) "$\Rightarrow$": Angenommen, Γ enthält einen Eulerkreis. Wir möchten nun zeigen, dass alle Ecken in Γ geraden Eckengrad haben.

Beim Durchschreiten des Eulerkreises wird jede Ecke genau so oft betreten wie verlassen. Jedes Betreten bzw. Verlassen findet auf unterschiedlichen Kanten statt, folglich führt eine gerade Anzahl an Kanten zu jeder Ecke. Das heißt, der Eckengrad jeder Ecke ist gerade.

"$\Leftarrow$": Angenommen, alle Eckengrade sind gerade. Wir wollen zeigen, dass Γ dann einen Eulerkreis enthält.

(i) Wähle eine beliebige Ecke und beginne einen Kantenzug im Graphen, bis er nicht weiter verlängert werden kann.

Falls Start- und Endpunkt dieses Kantenzugs identisch sind, fahre fort mit (ii).

Falls Start- und Endpunkt verschieden sind, so betritt man beim Durchlaufen des Kantenzugs den Endpunkt genau einmal mehr als man ihn verlässt. Nach Voraussetzung hat der Endpunkt geraden Grad, d.h. wir können den Kantenzug um eine Kante verlängern. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass man den Kantenzug nicht weiter verlängern kann, folglich kann dieser Fall nicht eintreten.

(ii) Falls dieser Kantenzug bereits alle Kanten enthält, wurde ein Eulerkreis gefunden, und die Behauptung ist damit gezeigt.

Falls dieser Kantenzug noch nicht alle Kanten enthält, entferne ihn aus dem Graphen.

Übrig bleibt ein (nicht notwendigerweise zusammenhängender) Graph, dessen Ecken alle geraden Eckengrad haben. Wähle eine Ecke mit Eckengrad > 0 und führe das Verfahren von (i) durch, um einen weiteren geschlossenen Kantenzug im Graphen zu konstruieren. Entferne auch diesen Kantenzug aus dem Graphen. Nach endlich vielen Schritten wurden dann alle Kanten aus dem Graphen entfernt, d.h. wir haben den Graphen in geschlossene Kantenzüge zerlegt, wie in Abbildung 6.4 am Beispiel durchgeführt.

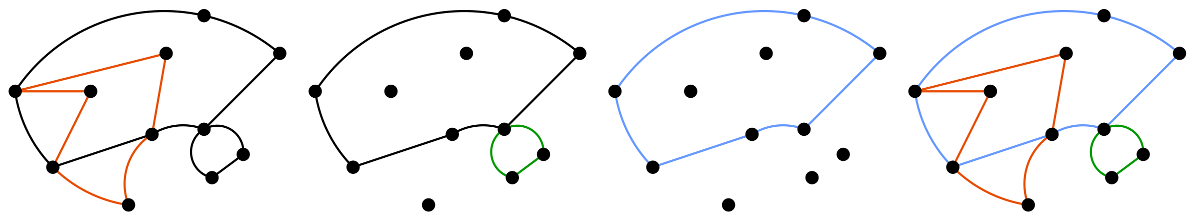


Abbildung 6.4: Skizze zum Beweis von Satz 6.6.

(iii) Wir haben also den Graphen in unterschiedliche Kantenzüge $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ zerlegt.

Es gibt eine Ecke in γ_n, die auch bei einem der anderen Kantenzüge durchlaufen wird. Wäre das nicht, der Fall, so gäbe es keine Verbindung von γ_n zu den anderen Kantenzügen, der Graph wäre also nicht zusammenhängend. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit haben γ_n und γ_{n-1} eine gemeinsame Ecke. Wir können also γ_n und γ_{n-1} an dieser Ecke aneinanderhängen und erhalten einen Kantenzug $\tilde{\gamma}_{n-1}$.

Der Graph ist dann in die Kantenzüge $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-2}, \tilde{\gamma}_{n-1}$ zerlegt – d.h. ein Kantenzug weniger. Wiederholen wir dieses Verfahren, so erhalten wir schließlich, dass der Graph aus einem einzigen Kantenzug $\tilde{\gamma}_1$ besteht, dies ist dann der gesuchte Eulerkreis.

(b) "$\Rightarrow$": Wenn Γ einen Eulerweg enthält, dann können wir eine Kante vom Start- zum Endpunkt des Eulerwegs in Γ einfügen. Der so erhaltene Graph sei $\tilde{\Gamma}$. $\tilde{\Gamma}$ enthält dann einen Eulerkreis und nach Teil (a) gilt, dass alle Ecken von $\tilde{\Gamma}$ geraden Grad haben. Weil die Eckengrade von Γ bis auf in zwei Ecken mit den Eckengraden von $\tilde{\Gamma}$ übereinstimmen, zeigt das die Behauptung.

"$\Leftarrow$": Falls 0 Ecken in Γ ungeraden Grad haben, so enthält Γ nach Teil (a) einen Eulerkreis, welcher insbesondere ein Eulerweg ist.

Nach Satz 6.3 kann es nicht passieren, dass genau eine Ecke ungeraden Grad hat.

Falls genau zwei Ecken in Γ ungeraden Grad haben, so können wir eine Kante zwischen den beiden Ecken mit ungeradem Grad einführen. Der so entstandene Graph sei $\tilde{\Gamma}$. In $\tilde{\Gamma}$ haben alle Ecken geraden Grad. Nach (a) gilt also, dass $\tilde{\Gamma}$ einen Eulerkreis enthält. Lassen wir die eingefügte Kante weg, so ergibt sich ein Eulerweg in Γ. □

6.3 Planare Graphen

Definition 6.7 Ein Graph heißt *planar*, wenn er in der Ebene eine Darstellung ohne sich schneidende Kanten hat.

In Abbildung 6.5 sind drei Graphen abgebildet. Der rechte ist offensichtlich planar, weil sich in der Darstellung keine Kanten schneiden. Der mittlere ist ebenfalls planar: Zwar schneiden sich dort zwei Kanten, doch man kann eine der Kanten etwas verschieben, sodass sich keine Kanten mehr schneiden. Durch eine geeignete Verschiebung erhält man tatsächlich den linken Graphen. Der rechte Graph ist nicht planar. Das heißt: Egal, wie man Kanten verschiebt, kann man nicht verhindern, dass sich mindestens zwei Kanten schneiden. Dieses Resultat wird in diesem Abschnitt bewiesen.

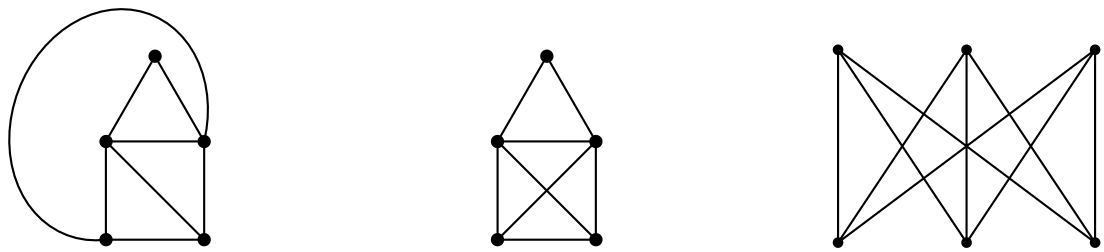
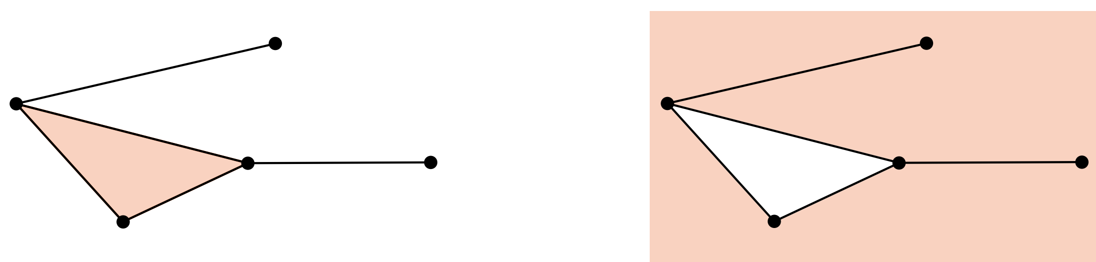


Abbildung 6.5: Beispiel für planare und nicht planare Graphen.

Definition 6.8 Gegeben sei ein zusammenhängender Graph Γ, der in der Ebene gezeichnet ist, ohne dass Kanten sich schneiden. Ein *Gebiet* von Γ ist ein Teil der Ebene, der durch einen geschlossenen Kantenzug von Γ begrenzt wird und keinen anderen geschlossenen Kantenzug enthält.

Im Folgenden ist ein zusammenhängender Graph abgebildet, der zwei verschiedene Gebiete hat:



Satz 6.9 (Eulersche Polyederformel) Wenn Γ ein zusammenhängender Graph ist, der sich in der Ebene ohne sich schneidende Kanten zeichnen lässt, dann gilt:

$$E - K + G = 2, \tag{6.2}$$

wobei

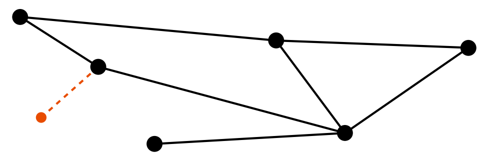
$$\begin{aligned} E &= \text{Anzahl von Ecken in } \Gamma, \\ K &= \text{Anzahl von Kanten in } \Gamma, \\ G &= \text{Anzahl von Gebieten in } \Gamma. \end{aligned}$$

Wir beweisen den Einsatz per Induktion über den Aufbau des Graphen. Das heißt, wir zeigen, dass die Behauptung für den einfachstmöglichen Graphen gilt. Daraufhin definieren wir zwei Operationen, mit denen man jeden Graphen erstellen kann, und zeigen, dass sie die Behauptung erhalten.

Beweis. Induktionsanfang: Für den Graphen, der nur aus einem Punkt besteht, gilt $E = 1$, $K = 0$, $G = 1$ (das Außengebiet). Folglich gilt die Formel in diesem Fall.

Induktionsschritt: Beginnend mit einer einzige Ecke kann man jeden Graphen mit den folgenden Operationen aufbauen:

(i) Einfügen einer neuen Ecke und gleichzeitig einer Kante, die zu dieser Ecke führt.



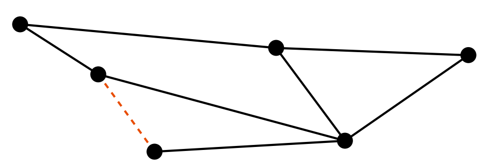
Es sei Γ der Graph vor Einfügung und $\tilde{\Gamma}$ der Graph nach Einfügung. Es seien E, K, G, $\tilde{E}$, $\tilde{K}$ und $\tilde{G}$ die Ecken-, Kanten- und Gebietsanzahlen von Γ beziehungsweise $\tilde{\Gamma}$. Angenommen, die Behauptung gilt für Γ, das heißt, es gilt $E - K + G = 2$.

Nach Einfügung gilt $\tilde{E} = E + 1$, $\tilde{K} = K + 1$ und $\tilde{G} = G$. Folglich gilt auch

$$\begin{aligned} \tilde{E} - \tilde{K} + \tilde{G} &= (E + 1) - (K + 1) + G \\ &= E + K + G = 2, \end{aligned}$$

das heißt, auch $\tilde{G}$ erfüllt die Behauptung.

(ii) Einfügen einer neuer Kante, die zwei bestehende Ecken miteinander verbindet.



Mit den Bezeichnungen wie in (i) gilt: $\tilde{E} = E$, $\tilde{K} = K$, $\tilde{G} = G$. Also können wir auch hier folgern, dass $\tilde{E} - \tilde{K} + \tilde{G} = 2$.

Sei nun Γ der Graph aus der Voraussetzung des Satzes. Es gibt nun eine Abfolge von Aktionen

$$\text{(Einfachster Graph)} \xrightarrow{\text{(i)}} \xrightarrow{\text{(i)}} \xrightarrow{\text{(ii)}} \xrightarrow{\text{(i)}} \xrightarrow{\text{(ii)}} \xrightarrow{\text{(ii)}} \dots \xrightarrow{\text{(i)}} \Gamma, \tag{6.3}$$

die den einfachsten Graphen (nur eine Ecke) in Γ überführt. Dabei muss die Reihenfolge von (i) und (ii) natürlich nicht genau wie in Zeile 6.3 aussehen, sondern die Operationen können auch in anderer Reihenfolge oder Zusammensetzung vorkommen.

In jedem Fall gilt aber: Die Formel gilt für den einfachsten Graphen und in jedem Schritt bleibt die Richtigkeit der Formel erhalten. Folglich gilt die Formel auch für Γ. $\square$

Bemerkung:

Diese Formel ergibt nur Sinn für Graphen, die ohne sich schneidende Kanten gezeichnet sind. Für beliebige Graphen gibt es keine sinnvolle Definition von Gebiet und man sollte daher nicht versuchen, die Formel auf Graphen mit sich schneidenden Kanten anzuwenden.

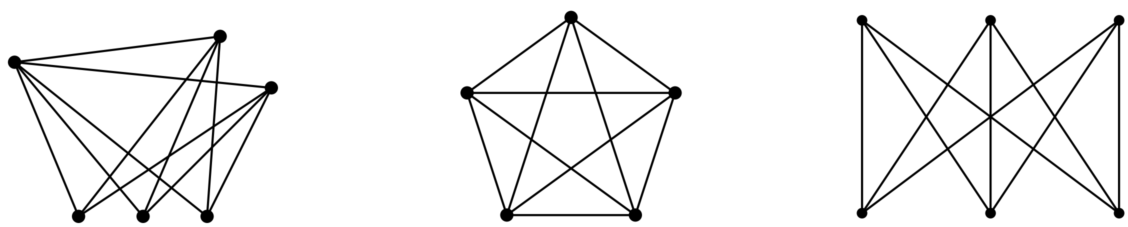
Definition 6.10 (a) Sei $n \geq 2$. Gegeben sei ein Graph Γ mit n Gruppen von Ecken, die aus l_1, l_2, $\ldots$, beziehungsweise l_n Ecken bestehen, so dass jede Ecke einer Gruppe mit jeder Ecke einer anderen Gruppe durch eine Kante verbunden ist. Ecken der gleichen Gruppe sollen nicht durch Kanten verbunden sein.

Dann heißt Γ *vollständiger, n-partiter Graph mit l_1, l_2, $\ldots$, beziehungsweise l_n Ecken.* Wir schreiben dafür $K_{l_1,l_2,\ldots,l_n}$.

(b) Sei $n = 1$. Gegeben sei ein Graph Γ mit einer Gruppe von Ecken, die aus n Ecken besteht, sodass jede Ecke mit jeder anderen verbunden ist.

Dann heißt Γ *vollständiger Graph mit n Ecken* oder *vollständiger n-Ecksgraph.* Wir schreiben dafür K_n.

Obwohl die Objekte K_n und K_{l_1,l_2} ähnlich notiert werden, sind sie von sehr unterschiedlicher Natur. Die Bezeichnungen haben sich aber mittlerweile in der Graphentheorie durchgesetzt und sind allgemein üblich. In Abbildung 6.6 sind Beispiele für vollständige und vollständige n-partite Graphen gezeigt.



$K_{1,2,3}$ K_5 $K_{3,3}$

Abbildung 6.6: Beispiel für vollständige Graphen und vollständige n-partite Graphen

Definition 6.11 (n-Eck) Ein Gebiet in einem Graphen, das von n Kanten umschlossen ist, heißt n-Eck.

Satz 6.12 In einem planaren Graphen ohne Dreiecke, Zweiecke und Einecke gilt

$$K \geq 2G,$$

wobei K die Anzahl der Kanten des Graphen und G die Anzahl der Gebiete des Graphen ist.

Beweis. Es sei λ die Anzahl von Kanten, von der ein Gebiet durchschnittlich umgeben ist. (Das muss keine ganze Zahl sein) Wir zählen nun alle Kanten im Graphen, indem wir $G \cdot \lambda$ bilden. Dabei haben wir jede Kante mindestens einmal (falls die Kante an ein Gebiet angrenzt) und höchstens doppelt (falls die Kante an zwei Gebiete angrenzt) gezählt. Es gilt also

$$K \leq \lambda G \leq 2K.$$

Nach Voraussetzung ist $\lambda \geq 4$, also

$$4G \leq \lambda G \leq 2K$$

und Division durch 2 liefert die Behauptung. □

Satz 6.13 $K_{3,3}$ ist nicht planar.

Beweis. Angenommen, $K_{3,3}$ ist planar. Dann gilt:

(i) $K_{3,3}$ enthält keine Dreiecke, Zweiecke oder Einecke. Nach Satz 6.12 gilt $K \geq 2G$. Nach G umgestellt lautet dies

$$\frac{1}{2}K \geq G. \tag{6.4}$$

(ii) Nach Satz 6.9 gilt die Eulersche Polyederformel. Nach G umgestellt lautet diese

$$G = 2 - E + K. \tag{6.5}$$

(iii) Durch Abzählen erhalten wir

$$E = 6, \;\; K = 9. \tag{6.6}$$

(Hinweis: Um die Gebiete zählen zu können, müssten wir eine Darstellung des Graphen ohne sich schneidende Kanten finden, das ist aber unmöglich. Es wird hier aber auch nicht benötigt)

Wir setzen nun Ungleichung 6.4 in Gleichung 6.5 ein und erhalten.

$$\frac{1}{2}K \geq 2 - E + K.$$

Setzen wir hier die Werte aus Zeile 6.6 ein, so erhalten wir $\frac{9}{2} \geq 2 - 6 + 9$, was ein Widerspruch ist. Also muss die Annahme, dass $K_{3,3}$ planar ist, falsch gewesen sein. □

6.4 Färbungen von Graphen

In diesem Abschnitt nehmen sei Γ stets ein zusammenhängender Graph. Ergebnisse für nicht zusammenhängende Graphen erhält man, indem man die Ergebnisse dieses Abschnitts auf die einzelnen Zusammenhangskomponenten anwendet.

6.4.1 Färbungen von Ecken

Definition 6.14 Eine Färbung von Ecken eines Graphen heißt *zulässig*, falls zwei Ecken, die durch eine Kante verbunden sind, verschiedene Farben haben.

In Abbildung 6.7 sind eine zulässige und eine unzulässige Färbung eines Graphen gegeben.

Definition 6.15 Sei Γ ein Graph. Die kleinste Zahl von Farben, die für eine zulässige Färbung von Ecken des Graphen benötigt wird, heißt *chromatische Zahl von* Γ und wird mit $\chi(\Gamma)$ bezeichnet.

Abbildung 6.7: Eine zulässige und eine unzulässige Eckenfärbung eines Graphen

Bemerkung:

Offensichtlich gilt für jeden nicht-leeren Graphen Γ:

(1) $\chi(\Gamma) \geq 1$, weil mindestens eine Farbe zum Färben der Ecken benötigt wird.

(2) $\chi(\Gamma) \leq E$, wobei E die Anzahl der Ecken von Γ ist. Dies gilt, weil man eine zulässige Färbung erhält, wenn man jede Ecke des Graphen mit einer anderen Farbe färbt.

Ziel ist es nun, eine bessere Abschätzung $\chi(\Gamma)$ zu finden.

Verfahren 6.16 *Greedy-Algorithmus* zum Finden einer zulässigen Eckenfärbung eines Graphen.

(i) Wähle eine beliebige Startecke und färbe sie mit Farbe 1.

(ii) Wähle eine beliebige Ecke, die noch nicht gefärbt ist. Färbe sie mit der niedrigsten Farbe, die noch nicht für eine der banchbarten Ecken vergeben ist. (Falls zuvor nur die Farben $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$ benutzt wurden und diese alle bei benachbarten Ecken vorkommen, dann führe eine neue Farbe $k + 1$ ein)

(iii) Wenn keine ungefärbte Ecke mehr vorhanden ist, liegt eine zulässige Eckenfärbung des Graphen vor.

In Abbildung 6.8 wird der Greedy-Algorithmus an einem Beispielgraphen durchgeführt. Die zu färbenden Ecken wurden dabei nach keinem speziellen Muster ausgewählt.

Satz 6.17 Sei Γ ein Graph.

(a) Verfahren 6.16 liefert eine zulässige Eckenfärbung von Γ.

(b) Es sei n der maximale Grad aller Ecken in Γ. Dann gilt $\chi(\Gamma) \leq n + 1$.

Beweis. (a) Am Ende des Verfahrens sind alle Ecken mit einer Farbe gefärbt. Bei jeder Färbung einer Ecke wird der Fall ausgeschlossen, dass eine benachbarte Ecke in der gleichen Farbe gefärbt ist. Das Verfahren liefert also eine zulässige Färbung.

(b) Wir zeigen, dass bei der Ausführung von Verfahren 6.16 höchstens $n + 1$ Farben benutzt werden.

Angenommen, es werden mehr als $n+1$ Farben benutzt. Dann gibt es eine Ecke e, die als erste mit der Farbe $n + 2$ gefärbt wurde. Das kann nur passieren, wenn e benachbart zu Ecken der Farben 1, 2, 3, $\ldots$, $n - 1$, n und $n + 1$ ist. Das heißt, $\deg(e) \geq n + 1$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. Also war die Annahme falsch, und bei der Ausführung

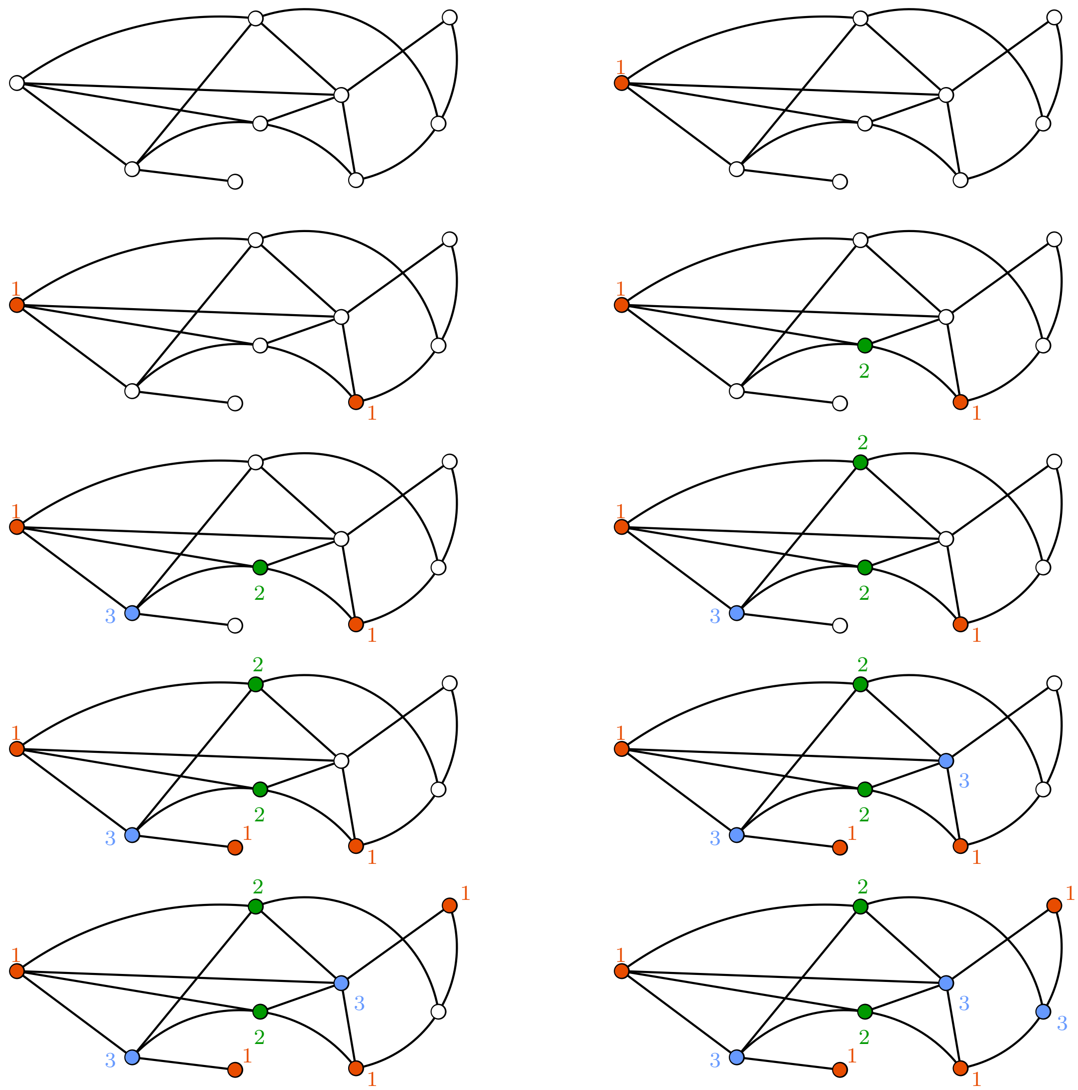


Abbildung 6.8: Greedy-Algorithmus an einem Beispielgraphen

des Verfahrens werden nur $n+1$ Farben benutzt.

Es existiert also eine Färbung mit höchstens $n+1$ Farben, folglich gilt $\chi(\Gamma) \leq n+1$.

□

Das Beispiel aus Abbildung 6.8 zeigt, dass der Greedy-Algorithmus manchmal bessere Ergebnisse als die obere Schranke $n+1$ liefern kann.

6.4.2 Färbungen von Kanten

Definition 6.18 Eine Färbung von Kanten eines Graphen heißt *zulässig*, falls zwei Kanten, die eine gemeinsame Ecke haben, verschiedene Farben haben.

Definition 6.19 Sei Γ ein Graph. Die kleinste Zahl von Farben, die für eine zulässige Färbung von Kanten des Graphen benötigt wird, heißt *chromatischer Index von* Γ und wir mit $\chi'(\Gamma)$ bezeichnet.

Der folgende Satz gibt eine leichte Möglichkeit zur Berechnung des chromatischen Indexes eines Graphen an:

Satz 6.20 (Satz von Vizing) Sei Γ ein Graph und n der maximale Grad aller Ecken in Γ. Dann gilt $\chi'(\Gamma) = n$ oder $\chi'(\Gamma) = n+1$.

Der Beweis ist kompliziert und wird daher hier weggelassen. Den Beweis findet man zum Beispiel in *Reinhard Diestel: Graphentheorie*.

Bei Kantenfärbungen ist es auch von Interesse, nicht zulässige Kantenfärbungen zu betrachten. Dies eröffnet das Gebiet der *Ramsey-Theorie*, in der es auch heute noch viele ungelöste Fragen gibt.

Definition 6.21 Seien m und $n \in \mathbb{N}_0$. Die *Ramseyzahl* $R(m,n)$ ist die kleinste natürliche Zahl, sodass eine beliebige Kantenfärbung des vollständigen $R(m,n)$-Ecksgraphen $K_{R(m,n)}$ mit zwei Farben (Farbe 1 und Farbe 2) eine Gruppe von m Ecken enthält, deren Verbindungskanten alle die Farbe 1 haben, oder eine Gruppe von n Ecken enthält, deren Verbindungskanten alle die Farbe 2 haben.

Die Berechnung von Ramseyzahlen ist ein sehr schweres Problem. Zum Beispiel konnte $R(10,13)$ auch mit Computerhilfe bisher noch nicht bestimmt werden, Ramseyzahlen $R(m,n)$ für größere m und n sind ebenfalls noch unbekannt. Die Angabe einer Formel für $R(m,n)$ in Abhängigkeit von m und n wäre eine große Sensation.

Satz 6.22 $R(3,3) = 6$.

Beweis. Siehe Aufgabe 6.7.. □

6.4.3 Färbungen von Gebieten

Definition 6.23 Eine Färbung von Gebieten eines planaren Graphen heißt *zulässig*, falls zwei benachtbarte Gebiete verschiedene Farben haben.

Die Frage nach der mindestens nötigen Anzahl von Farben für zulässige Färbungen von Gebieten hat eine überraschend einfache Antwort:

Satz 6.24 (Vier-Farben-Satz) Jeder planare Graph hat eine zulässige Färbung von Gebieten mit vier Farben.

Der Beweis des Satzes ist sehr kompliziert und bis jetzt konnte noch kein Beweis ohne Computerhilfe geführt werden. Bei allen bisherigen Beweisen besteht einer der Beweisschritte darin, in einigen Spezialfällen Färbungen mit vier Farben konkret anzugeben. Im ersten vollständigen Beweis mussten 1936 Spezialfälle geprüft werden.

Die erste Schritt Beweises von Satz 6.24 bestehen darin, zu zeigen, dass sechs Farben genügen. Der zweite Schritt besteht darin, zu zeigen, dass fünf Farben genügen. Beide Aussagen können mit elementaren Methoden gezeigt werden und wir geben im Folgenden den Beweis für sechs Farben.

Definition 6.25 Gegeben sei ein Graph Γ. Ersetzt man jedes Gebiet von Γ durch eine Ecke und fügt eine Kante zwischen zwei Ecken ein, falls die Gebiete im ursprünglichen Graphen benachbart waren, dann heißt der so entstehende Graph der *duale Graph von* Γ. Wir schreiben dafür auch Γ^*.

In Abbildung 6.9 ist an einem Beispiel der Übergang von einem Graphen zu seinem dualen gezeigt.

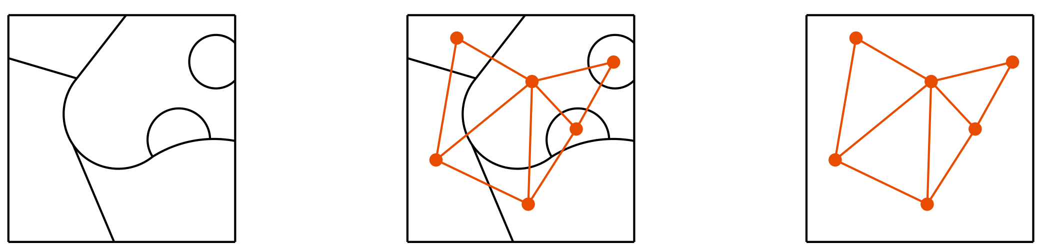


Abbildung 6.9: Ein Beispiel für die Konstruktion des dualen Graphen

Satz 6.26 (Sechs-Farben-Satz) Jeder planare Graph hat eine zulässige Färbung von Gebieten mit sechs Farben.

Beweis. Sei Γ ein planarer Graph und Γ^* sein Dual. Es ist anschaulich klar, dass auch Γ^* ein planarer Graph ist. Wir verwenden das ohne weiteren Beweis. Seien E, K, beziehungsweise G die Anzahlen von Ecken, Kanten, beziehungsweise Gebieten von Γ.

(i) Bei der Konstruktion von Γ^* werden zwischen zwei Ecken entweder eine oder keine Kante gezeichnet, niemals jedoch zwei oder mehr. Folglich gibt es in Γ^* keine Einecke oder Zweiecke. Nach Aufgabe 6.4. (Gleichung 6.10) gilt damit $3G \leq K$. Setzen wir das in die

Eulersche Polyderformel ein, so erhalten wir

$$K \leq 3E - 6. \tag{6.7}$$

(ii) Wir zeigen nun, dass eine Ecke mit Eckengrad < 6 existiert.

Angenommen, so eine Ecke existiert nicht, das heißt, alle Ecken haben Eckengrad ≥ 6. Wir zählen für jede Ecke die Kanten, die an sie angrenzen und summieren alle Zahlen. Wir erhalten dadurch das Doppelte der Kantenzahl im Graphen, das heißt, $2K \geq 6E$, beziehungsweise

$$E \leq \frac{1}{3}K. \tag{6.8}$$

Setzen wir das in Gleichung 6.7 ein, so erhalten wir

$$K \leq 3E - 6 \leq K - 6, \tag{6.9}$$

was ein Widerspruch ist.

Also war die Annahme falsch. Das heißt, es existiert eine Ecke mit Eckengrad < 6.

(iii) Nach Teil (ii) gibt es in Γ^* eine Ecke mit Grad < 6. Entferne diese Ecke und alle Kanten, die zu ihr führen. Im entstandenen Graphen gibt es wieder eine Ecke mit Grad < 6, entferne sie erneut und wiederhole dies solange, bis nur noch 6 Ecken übrig sein.

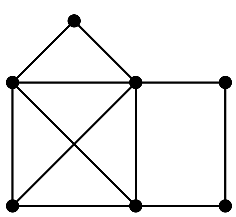
Dieses 6 Ecken kann man mit 6 Farben geeignet färben. Füge nun Schritt für Schritt die entfernten Ecken und Kanten wieder ein. Beim Einfügen wird stets eine Ecke mit höchstens 5 Verbindungslinien zu anderen Ecken eingefügt. Es gibt also immer eine geeignete Farbe für die neu eingefügte Ecke.

Nachdem alle Ecken wieder eingefügt wurden, haben den ursprünglichen Graphen Γ^* mit einer geeigneten Färbung von 6 Farben erhalten.

Die Eckenfärbung von Γ^* liefert die gesuchte Gebietsfärbung von Γ. □

6.5 Aufgaben

6.1. In welchen der beiden Graphen aus Abbildung 6.10 existiert ein Eulerkreis? Und ein Eulerweg?



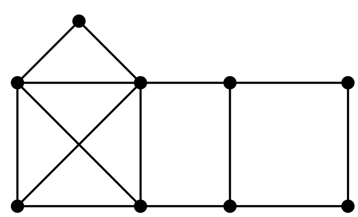


Abbildung 6.10: Zwei modifizierte Häuser des Nikolaus'

6.2. Wir betrachten einen vollständigen n-Ecksgraphen. Also einen Graphen mit n Ecken, in dem jede Ecke durch genau eine Kante mit jeder übrigen Ecke verbunden ist.

Enthält der Graph einen Eulerweg? Falls nein: Wie viele Kanten muss man mindestens hinzufügen, damit der Graph einen Eulerweg enthält? Beantworte die Frage in Abhängigkeit von n.

6.3. Konstruiere Graphen mit den folgenden Eigenschaften, oder beweise, dass solche Graphen nicht existieren:

(a) Ein Graph mit 6 Ecken, die die Grade 1, 2, 3, 4, 5, bzw. 6 haben.

(b) Ein Graph mit 7 Ecken, die die Grade 1, 2, 3, 4, 5, 6, bzw. 7 haben.

6.4. Zeige, dass K_5 nicht planar ist. Gehe dafür wie folgt vor:

(a) Sei Γ ein zusammenhängender, planarer Graph ohne Zweiecke und Einecke mit K Kanten und G Gebieten. Zeige, dass dann gilt:

$$3G \leq 2K. \tag{6.10}$$

(b) Füge die Eulersche Polyederformel (Satz 6.9) und Ungleichung 6.10 zu einer Ungleichung zusammen, setze die Anzahlen von Ecken und Kanten von K_5 ein und erhalte so einen Widerspruch zu der Annahme, dass K_5 planar ist.

6.5. (a) Bei der Durchführung des Greedy-Algorithmus' zum Finden einer zulässigen Eckenfärbung 6.16 müssen Ecken gewählt werden. Ist die Anzahl der benötigten Farben bei jeder Eckenwahl gleich?

(b) Zeige: Der Greedy-Algorithmus liefert nicht immer das optimale Ergebnis.

Das heißt: Gib ein Beispiel für einen Graphen Γ und eine Durchführung des Greedy-Algorithmus an, bei der mehr Farben als $\chi(\Gamma)$ benutzt werden.

(c) Kann man in jedem Graphen bei geschickter Eckenwahl den Greedy-Algorithmus so durchführen, dass genau $\chi(\Gamma)$ Farben benötigt werden? (Antwort auf diese Frage ist dem Fragesteller nicht bekannt)

6.6. (a) Zeige: Für den vollständigen n-Ecksgraphen K_n gilt $\chi(K_n) = n$.

(b) Zeige: Für einen n-partiten Graphen mit $l_1, l_2, \ldots,$ beziehungsweise l_n Ecken $K_{l_1,\ldots,l_n}$ gilt $\chi(K_{l_1,\ldots,l_n}) = n$.

(c) Zeige: Für den Graphen Γ aus Abbildung 6.8 gilt $\chi(\Gamma) = 3$.

Hinweis: Gib in jedem Fall eine zulässige Färbung an, die so viele Farben benutzt, wie für die chromatische Zahl behauptet werden. Zeige danach, dass keine Färbung mit weniger Farben existieren kann. Für Teil (c) kann es hilfreich sein, Teil (a) zu benutzen.

6.7. (a) Beweise Satz 6.22.

Zeige zunächst $R(3,3) > 5$, indem du in K_5 eine Kantenfärbung mit zwei Farben angibst, sodass es keine Gruppe von drei Ecken gibt, die mit Kanten derselben Farben verbunden sind.

Zeige anschließend $R(3,3) \leq 6$, indem du zeigst, dass es in K_6 bei jeder Kantenfärbung mit zwei Farben eine Gruppe von drei Ecken gibt, die mit Kanten derselben Farben verbunden sind.

(b) Auf einer Party sind mindestens sechs Gäste. Zeige: Unter den Gästen gibt es mindestens drei Gäste, die sich untereinander bereits vor der Party kannten, oder es gibt mindestens drei Gäste, die sich untereinander vor der Party noch nicht kannten.

6.8. Entscheide für die beiden Graphen in Abbildung 6.11 ob sie vollständige, n-partite Graphen mit $l_1, \ldots,$ beziehungsweise l_n Ecken sind. $n, l_1, \ldots, l_n$ können dabei irgendwelche natürlichen Zahlen sein.

6.9. In dieser Aufgabe werden hamiltonsche Graphen definiert.

Abbildung 6.11: Es kann schwierig sein, für einen gegebenen Graphen zu entscheiden, ob er n-partit ist oder nicht.

Definition 6.27 Ein Kantenzug in einem Graphen, der jede Ecke genau einmal durchläuft, heißt *Hamiltonpfad*.
Ein Hamiltonpfad, bei dem Start- und Endpunkt übereinstimmen, heißt *Hamiltonkreis*.

Zeige, dass die Eigenschaften hamiltonsch und eulersch unabhängig voneinander sind. Das heißt:

(a) Gib ein Beispiel für einen Graphen an, der einen Eulerpfad (Eulerkreis) enthält, aber keinen Hamiltonpfad (Hamiltonkreis).

(b) Gib ein Beispiel für einen Graphen an, der einen Hamiltonpfad (Hamiltonkreis) enthält, aber keinen Eulerpfad (Eulerkreis).

6.10. Wir betrachten einen *Turniergraphen mit n Spielern.Turniergraph* Das ist ein *gerichteter Graph* mit n Ecken, was bedeutet, dass Kanten eine Richtung haben. Beim Durchlaufen des Graphen (zum Beispiel für einen Eulerpfad oder Hamiltonpfad) dürfen die Kanten nur entlang ihrer Richtung durchlaufen werden. Gerichtete Graphen werden auch *Digraphen* genannt.

Ein Beispiel für einen Turniergraphen mit 4 Spielern ist in Abbildung 6.12 gezeigt.

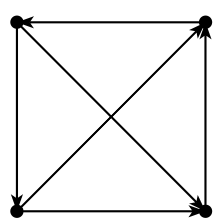


Abbildung 6.12: Beisiel für einen Turniergraphen mit 4 Spielern

Zeige: Ein Turniergraph mit n Spielern enthält für beliebiges n einen Hamiltonpfad.

Hinweis: Man kann den Beweis über den Aufbau des gerichteten Graphen führen.

6.11. Gegeben sei ein Graph, der einen Hamiltonkreis enthält. Enthält er auch einen Eulerkreis?

Gilt die Umkehrung?

6.12. Diese Aufgabe behandelt gewichtete Graphen.

Definition 6.28 Ein Graph, bei dem jede Kante eine rationale Zahl zugewiesen ist, heißt *gewichteter Graph*. Die einer Kante zugewiesene Zahl heißt *Gewicht der Kante*.

Ein Beispiel für einen gewichteten Graphen ist in Abbildung 6.13 dargestellt.

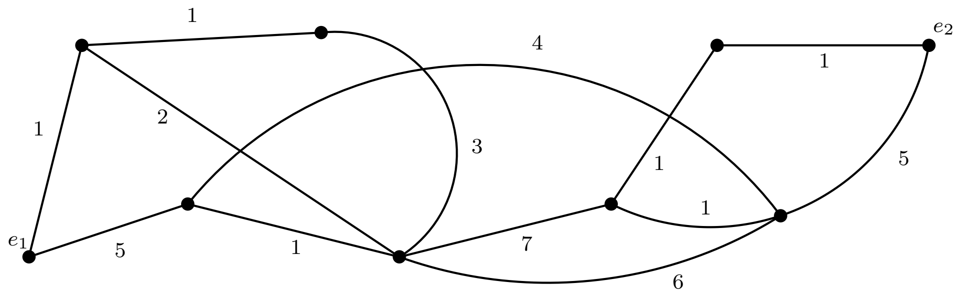


Abbildung 6.13: Ein Beispiel für einen gewichteten Graphen, die Kantengewichte sind neben den Kanten notiert

(a) Finde den kürzesten Weg im Graphen aus Abbildung 6.13 von e_1 nach e_2. Das heißt: Finde einen Kantenzug, der e_1 und e_2 verbindet, sodass die Summe der Kantengewichte minimal ist unter allen Kantenzügen die e_1 und e_2 verbinden.

(b) Der folgende Algorithmus löst das Problem des Auffindes eines kürzesten Weges in einem gewichteten Graphen:

Verfahren 6.29 (Dijkstra-Algorithmus) Auffinden des Abstandes von Ecke e zu Ecke f in einem gewichteten Graphen.

(i) Es sei UNBESUCHT die Menge, die alle Ecken des Graphen bis auf e enthält. Wir nennen e die *aktive* Ecke. Weise jeder Ecke einen *vorläufigen Abstand* zu: Für e den Abstand 0, für jede andere Ecke den Abstand ∞.

(ii) Falls f die aktive Ecke ist, so ist der Algorithmus beendet. Der Abstand von e und f ist der vorläufige Abstand von f.

(iii) Berechne für jede Nachbarecke der aktiven Ecke einen neuen vorläufigen Abstand: Addiere den vorläufigen Abstand der aktiven Ecke und das Kantengewicht der Kante, die zur betrachteten Nachbarecke führt. Falls das Ergebnis kleiner ist als der bisherige vorläufige Abstand der Nachbarecke, so lege das Ergebnis als neuen vorläufigen Abstand der Nachbarecke fest, anderenfalls lasse den vorläufigen Abstand der Nachbarecke unverändert.

(iv) Entferne die aktive Ecke aus UNBESUCHT. Wähle diejenige Ecke in UNBESUCHT mit dem kleinsten vorläufigen Abstand und lege sie als aktive Ecke fest.

Wende das Verfahren auf den Graphen aus Abbildung 6.13 und die Ecken e_1 und e_2 an.

6.13. Diese Aufgabe behandelt Bäume.

Definition 6.30 Ein Kantenzug in einem Graphen heißt *Kreis*, falls er geschlossen ist (das heißt, Start- und Entpunkt sind identisch) und keine Kante mehr als einmal durchlaufen wird.
Ein Graph heißt *Baum*, falls er zusammenhängend ist und keinen Kreis mit mindestens einer Kante enthält. (Jeder Graph enthält den Kreis bestehend aus null Kanten)

In Abbildung 6.14 sind ein Beispiel und ein Gegenbeispiel für die Definition gegeben.

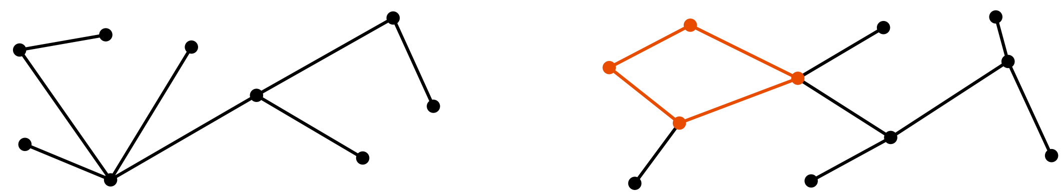


Abbildung 6.14: Der linke Graph ist ein Beispiel für einen Baum. Der rechte Graph ist kein Baum, weil er den farbig markierten Kreis enthält.

Im Folgenden sei Γ ein zusammenhängender Graph mit E Ecken und K Kanten.

(a) Zeige: Wenn Γ ein Baum ist, dann gilt $K = E + 1$.

(b) Zeige: Wenn $K = E + 1$ gilt, dann ist Γ ein Baum.

Hinweis: Die Behauptung kann man zum Beispiel über den Aufbau des Graphen zeigen.

(c) Zeige: Wenn Γ ein Baum ist, und man zwischen zwei beliebigen Ecken eine Kante einfügt, so ist der entstehende Graph kein Baum mehr.

(d) Entscheide ohne Beweis: Ist die folgende Bedingung eine äquivalente Charakterisierung von Bäumen? Das heißt: Wenn Γ ein Baum ist, gilt dann die Bedingung? Und wenn die Bedigung gilt, ist Γ dann ein Baum? Welche der beiden Implikationen gelten?

"Entfernt man eine beliebige Kante des Graphen, so ist der Graph nicht mehr zusammenhängend."

(e) Entscheide ohne Beweis: Ist die folgende Bedingung eine äquivalente Charakterisierung von Bäumen?

"Der Graph hat eine zulässige Eckenfärbung mit zwei Farben."

6.14. *Vortragsthema: Hinreichende Kriterien für die Existenz von Hamiltonkreisen.* Erkläre das Theorem von Tutte: "Jeder 4-zusammenhängende planare Graph enthält einen Hamiltonkreis." Erkläre die Vermutung von Barnette: "Jeder bipartite Polyedergraph enthält einen Hamiltonkreis." Ein Beweis ist in beiden Fällen nicht nötig, und wäre im zweiten Fall sogar eine kleine mathematische Sensation.

6.15. *Vortragsthema: Das P-NP-Problem.* Im Vortrag soll anschaulich das P-NP-Problem erklärt werden, die genaue Definition unter Verwendung von Turingmaschinen soll nicht erklärt werden. Um die Klassen P und NP zu erklären, kann man die folgenden Algorithmen betrachten: Prüfung eines Graphen auf Eulerkreise, Prüfung eines Graphen auf Bipartitheit, Prüfen eines Graphen auf Hamiltonkreise, Prüfung auf k-Cliquen in einem Graphen.

(Die ersten beiden Probleme sind bekannterweise in P, die letzten beiden Probleme sind NP-vollständig)

6.16. Aufgaben der Mathematik-Olympiade: 390834, 360824

7. Ungleichungen

7.1 Begriffe

In diesem Abschnitt werden einige Informationen zusammengestellt, die anschaulich klar sind. Sie wurden in den vorigen Kapiteln auch bereits ohne Einführung benutzt. Solange keine Unklarheiten bei den Begriffen auftreten, kann das Kapitel übersprungen werden.

Definition 7.1 Seien x und y rationale Zahlen.

(a) Wir sagen, dass x *kleiner gleich* y ist, falls eine nicht-negative Zahl $a \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ mit $x + a = y$ existiert. Wir schreiben dafür $x \leq y$.

(b) Wir sagen, dass x *kleiner als* y ist, falls $x \leq y$ und $x \neq y$. Wir schreiben dafür $x < y$.

Beim Lösen von Ungleichungen können wir die gleichen Äquivalenzumformungen wie beim Lösen von Gleichungen anwenden. Wir müssen dabei allerdings beachten, dass sich bei einigen Operationen das Ungleichheitszeichen ändert.

Satz 7.2 (Äquivalenzumformungen für Ungleichungen) Seien x, y, a rationale Zahlen. Dann gilt:

(a) Es gilt $x \leq y$ genau dann, wenn $x + a \leq y + a$.

(b) Sei $a > 0$. Dann gilt $x \leq y$ genau dann, wenn $xa \leq ya$.

(c) Sei $a < 0$. Dann gilt $x \leq y$ genau dann, wenn $xa \geq ya$.

(d) Seien x, y beides positive Zahlen oder beides negative Zahlen verschieden von 0. Dann gilt $x \leq y$ genau dann, wenn $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$.

(e) Seien x, y beides nicht-negative Zahlen. Dann gilt $x \leq y$ genau dann, wenn $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$.

(f) Seien x, y beides nicht-negative Zahlen. Dann gilt $x \leq y$ genau dann, wenn $x^2 \leq y^2$.

Beweis. (a), (b) und (c) folgen direkt aus der Definition von $\leq$ (siehe Definition 7.1).

(d) Wir zeigen nur den Fall, dass x und y positive Zahlen sind. Der negative Fall folgt analog.

"$\Rightarrow$": Wir haben $x \leq y$, das heißt, es existiert eine nicht-negative Zahl $a \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, sodass $x + a = y$. Durch Umstellen sehen wir, dass $(y - a)$ eine nicht-negative Zahl ist. Folglich ist die Zahl $c \in \mathbb{Q}$ gegeben durch

$$c = \frac{a}{y(y-a)} \tag{7.1}$$

eine nicht-negative Zahl, weil c das Produkt aus nicht-negativen Zahlen ist. Es gilt $\frac{1}{y} + c = \frac{1}{x}$, folglich gilt nach Definition $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$.

"$\Leftarrow$": Falls $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$, so gilt nach der Hinrichtung auch

$$\frac{1}{\frac{1}{x}} \leq \frac{1}{\frac{1}{y}},$$

das ist aber gerade $x \leq y$. □

Beispiel:

Zeige, dass für alle positiven Zahlen x gilt: $\frac{1}{2x+2} < 1$.

Beweis.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2x+2} < 1 & \\ \Leftrightarrow \quad & 2x+2 > 1 & \text{(nach Satz 7.2 (d))} \\ \Leftrightarrow \quad & 2x > -1 & \text{(nach Satz 7.2 (a))} \\ \Leftrightarrow \quad & x > -\frac{1}{2} & \text{(nach Satz 7.2 (b))} \end{aligned}$$

und die letzte Zeile gilt, weil x nach Voraussetzung positiv ist. □

Hinweis: Im obigen Beweis hatten wir Äquivalenzen ("$\Leftrightarrow$") benutzt, obwohl wir nur an der Richtung $\Leftarrow$ interessiert waren. Es ist daher üblich, die Lösung in umgekehrter Reihenfolge aufzuschreiben, sodass bei einer offensichtlich waren Aussage begonnen wird und am Ende die zu zeigende Behauptung steht. Der Denkprozess beginnt aber meistens damit, zu prüfen, wie man die zu zeigende Aussage stückweise weiter vereinfachen kann, wie oben notiert.

7.2 Nicht-Negativität der Quadrate

Satz 7.3 (Nicht-Negativität der Quadrate) Für jede rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ gilt $x^2 \geq 0$. Gleichheit gilt genau dann, wenn $x = 0$.

Die Behauptung folgt aus der Definition der Multiplikation, die hier allerdings nicht formal eingeführt wurde. Daher wird der Beweis weggelassen.

Beispiel:

Zeige, dass für alle rationalen Zahlen $x \neq 0$ gilt: $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Zeige, dass Gleichheit genau für $x = 1$ gilt.

Beweis.

$$
\begin{aligned}
&& x + \frac{1}{x} &\geq 2 \\
\Leftrightarrow && x^2 + 1 &\geq 2x \\
\Leftrightarrow && x^2 - 2x + 1 &\geq 0 \\
\Leftrightarrow && (x-1)^2 &\geq 0,
\end{aligned}
$$

wobei die letzte Zeile nach Satz 7.3 (Nicht-Negativität der Quadrate) eine wahre Aussage ist. Damit ist der erste Teil der Behauptung gezeigt.

Es bleibt zu zeigen, dass Gleichheit genau für $x = 1$ gilt.

“$\Rightarrow$”: Wenn $x = 1$, dann gilt offensichtlich $1 + \frac{1}{1} = 2$.

“$\Leftarrow$”: Wenn die Gleichheit $x + \frac{1}{x} = 2$ gilt, dann erhalten wir mit den gleichen Umformungen wie vom Anfang des Beweises $(x-1)^2 = 0$. Nach Satz 7.3 folgt daraus $x - 1 = 0$, das heißt, $x = 1$. □

7.3 Mittelungleichungen

Definition 7.4 Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}$ rationale Zahlen.

(a) Die Zahl

$$\mathrm{AM}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \tag{7.2}$$

heißt *arithmetisches Mittel der Zahlen* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (kurz AM).

(b) Falls $x_i \geq 0$ für $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$, dann heißt die Zahl

$$\mathrm{GM}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \tag{7.3}$$

geometrisches Mittel der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (kurz GM).

(c) Falls $x_i > 0$ für $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$, dann heißt die Zahl

$$\mathrm{HM}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \tag{7.4}$$

harmonisches Mittel der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (kurz HM).

(d) Die Zahl

$$\mathrm{QM}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt{\frac{1}{n}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)} \tag{7.5}$$

heißt *quadratisches Mittel der Zahlen* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (kurz QM).

Man beachte die unterschiedlichen Voraussetzungen, unter denen die Mittelwerte definiert sind (Positivität oder Nicht-Negativität). Der folgende Satz erklärt die Benennung der verschiedenen Mittelwerte:

Satz 7.5 (Charakterisierung der Mittelwerte) Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}$ rationale Zahlen, sodass die jeweiligen Mittelwerte definiert sind. Dann gilt:

(a) $m = \mathrm{AM}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist die eindeutig bestimmte Zahl, für die gilt:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \underbrace{m + m + \cdots + m}_{n \text{ Summanden}}.$$

(b) $m = \mathrm{GM}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist die eindeutig bestimmte, positive Zahl, für die gilt:

$$x_1 \cdot x_2 \ldots x_n = \underbrace{m \cdot m \ldots m}_{n \text{ Faktoren}}.$$

(c) $m = \mathrm{HM}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist die eindeutig bestimmte Zahl, für die gilt:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = \underbrace{\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{m}}_{n \text{ Summanden}}.$$

(d) $m = \mathrm{QM}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist die eindeutig bestimmte, positive Zahl, für die gilt:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \underbrace{m^2 + m^2 + \cdots + m^2}_{n \text{ Summanden}}.$$

Terme, die als Summe von Zahlen geschrieben sind, werden manchmal *arithmetisch* genannt. Das AM ist also gerade die Zahl, die eine gewisse Eigenschaft für arithmetische Terme erfüllt, daher der Name.

Analog erklären sich die Bezeichnungen *geometrisch*, *harmonisch* und *quadratisch*.

Man könnte diese Charakterisierung auch als Definition der jeweiligen Mittelwerte nehmen, sie ist aber im Alltag nicht besonders hilfreich.

Beweis. (a), (b), (c) bleiben als Übungsaufgaben.

(d) Wir zeigen zunächst, dass m die behauptete Gleichung erfüllt:

$$\begin{aligned}
m^2 + m^2 + \cdots + m^2 &= \sqrt{\frac{1}{n}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)}^2 + \sqrt{\frac{1}{n}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)}^2 + \ldots \\
&= \left(\frac{1}{n}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)\right) + \left(\frac{1}{n}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)\right) + \ldots \\
&= n \cdot \left(\frac{1}{n}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)\right) \\
&= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass m eindeutig bestimmt ist. Angenommen, es existiert eine weitere, positive Zahl $\tilde{m}$, die die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \tilde{m}^2 + \tilde{m}^2 + \cdots + \tilde{m}^2$ erfüllt. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
& m^2 + m^2 + \cdots + m^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \tilde{m}^2 + \tilde{m}^2 + \cdots + \tilde{m}^2 \\
\Rightarrow \quad & m^2 + m^2 + \cdots + m^2 = \tilde{m}^2 + \tilde{m}^2 + \cdots + \tilde{m}^2 \\
\Rightarrow \quad & n \cdot m^2 = n \cdot \tilde{m}^2 \\
\Rightarrow \quad & m^2 = \tilde{m}^2
\end{aligned}
$$

und nach Voraussetzung sind m und $\tilde{m}$ beide positiv, also gilt m und $\tilde{m}$.

□

Hinweis:

Falls man in den Teil (d) von Satz 7.5 die Forderung "positiv" weglässt, dann ist die Zahl m aus der Behauptung nicht mehr eindeutig bestimmt, weil sowohl m als auch $(-m)$ die behauptete Eigenschaft haben. Das gleiche gilt für Teil (b), falls n eine gerade Zahl ist.

Satz 7.6 (Mittelungleichungen) Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}_{>0}$ positive, rationale Zahlen. Dann gilt

$$\mathrm{HM}(x_1, \ldots, x_n) \leq \mathrm{GM}(x_1, \ldots, x_n) \leq \mathrm{AM}(x_1, \ldots, x_n) \leq \mathrm{QM}(x_1, \ldots, x_n),$$

beziehungsweise in Kurzform

$$\mathrm{HM} \leq \mathrm{GM} \leq \mathrm{AM} \leq \mathrm{QM}\,. \tag{7.6}$$

Beweis. Wir geben hier nur einen Beweis für den Fall $n = 2$. Der Beweis für den allgemeinen Fall ist erheblich schwerer und findet sich in den Aufgaben. Wir wollen die Mittelungleichungen also für zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ zeigen.

(a) HM $\leq$ GM:

Nach Satz 7.3 ist die folgende erste Formelzeile wahr. Wir folgern daraus die Behauptung:

$$
\begin{aligned}
& \left(\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{b}{a} - 2 + \frac{a}{b} \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{b}{a} + 2 + \frac{a}{b} \geq 4 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{a^2} + \frac{2}{ab} + \frac{1}{b^2} \geq 4 \cdot \frac{1}{ab} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{2}{ab} + \frac{1}{b^2}} \leq \frac{1}{4} \cdot ab \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{4}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2} \leq ab \\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2}} \leq \sqrt{ab},
\end{aligned}
$$

wobei wir im letzten Schritt die Wurzel ziehen konnten, weil beide Seiten der Ungleichung positiv sind.

(b) GM $\leq$ AM:

Wieder beginnen wir mit einer (nach Satz 7.3) wahren Aussage und führen solange Umformungen aus, bis wir die behauptete Ungleichung erreicht haben:

$$\begin{aligned}
& & 0 &\leq \left(\frac{a-b}{4}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow & 0 &\leq \frac{a^2-2ab+b^2}{4} \\
&\Leftrightarrow & ab &\leq \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{(a+b)^2}{4} \\
&\Rightarrow & \sqrt{ab} &\leq \frac{a+b}{2},
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Wurzel ziehen konnten, weil beide Seiten der Ungleichung positiv sind.

(c) Bleibt als Übungsaufgabe.

□

7.4 Umordnungsungleichung

Satz 7.7 (Umordnungsungleichung) Seien $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n \in \mathbb{Q}$ rationale Zahlen. Sei $z_1, \ldots, z_n$ eine Permutation von $x_1, \ldots, x_n$ (d.h. die gleichen Zahlen in einer möglicherweise anderen Reihenfolge).
Dann gilt:

$$x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \geq z_1y_1 + \cdots + z_ny_n \geq x_ny_1 + \cdots + x_1y_n. \tag{7.7}$$

Das heißt: Die Summe der Produkte zweier Zahlenmengen ist maximal, wenn die Zahlenmengen gleich geordnet sind. Sie ist minimal, wenn die Zahlenmengen entgegengesetzt geordnet sind.

Beweis. Es sei i der Index des ersten Elementes von $(z_1, \ldots, z_n)$, sodass $z_i \neq x_i$. Es sei j der Index, an dem das Element x_i in der Permutation $(z_1, \ldots, z_n)$ auftaucht. (Wegen Minimalität von i ist dann $i < j$) Es sei M die Summe, die sich durch die Permutation $(z_1, \ldots, z_n)$ ergibt und $\tilde{M}$ die Summe, die sich ergibt, wenn man die Elemente x_i und x_j in der Permutation $(z_1, \ldots, z_n)$ tauscht:

$$\begin{aligned}
M &= z_1y_1 + \cdots + z_iy_i + \cdots + z_jy_j + \cdots + z_ny_n, \\
\tilde{M} &= z_1y_1 + \cdots + z_jy_i + \cdots + z_iy_j + \cdots + z_ny_n.
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
M - \tilde{M} &= z_iy_i - z_jy_i + z_jy_j - z_iy_j \\
&= \underbrace{(z_i - z_j)}_{\leq 0}\underbrace{(y_i - y_j)}_{\geq 0} \leq 0,
\end{aligned}$$

d.h. $\tilde{M} \geq M$. Die Summe wird also größer, wenn das richtig geordnete Element an der i-ten Stelle steht. Wiederholen wir diesen Schritt weitere Male (höchstens n Male insgesamt), so erhalten wir am Ende die richtig geordnete Summe $x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$, die größer ist, als die Startsumme.

Wir haben also gezeigt, dass die richtig geordnete Summe größer gleich allen permutierten Summen ist.

Analog zeigt man den Fall $\leq$. □

Beispiel:

Zeige: Für positive Zahlen $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}$ und eine beliebige Permutation $z_1, \ldots, z_n$ dieser Zahlen gilt

$$\frac{z_1}{x_1} + \cdots + \frac{z_n}{x_n} \geq n.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $x_1 \leq \cdots \leq x_n$. Sei $y_1 = \frac{1}{x_n} \leq y_2 = \frac{1}{x_{n-1}} \leq \cdots \leq y_n = \frac{1}{x_1}$. Dann gilt nach der Umordnungsungleichung (Satz 7.7)

$$\begin{aligned} & \underbrace{x_1 y_1}_{=1} + \cdots + \underbrace{x_n y_n}_{=1} \leq z_1 y_1 + \ldots z_n y_n \\ \Leftrightarrow \quad & n \leq \frac{z_1}{x_1} + \cdots + \frac{z_n}{x_n}. \end{aligned}$$

□

7.5 Rechnen mit Beträgen

Definition 7.8 (Betrag einer Zahl) Sei $x \in \mathbb{Q}$. Die Zahl $|x|$ definiert durch

$$|x| = \begin{cases} x & \text{, falls } x \geq 0 \\ -x & \text{, falls } x < 0 \end{cases} \tag{7.8}$$

heißt *Betrag von x*.

Der Betrag einer Zahl ist durch Fallunterscheidung definiert. Ein einfacher Weg, Gleichungen oder Ungleichungen zu lösen, in denen Beträge vorkommen, ist daher ebenfalls durch Fallunterscheidung.

Beispiel:

Zeige: Die Ungleichung $||x+1|-4| \geq 5$ wird genau durch die Zahlen $x \in [8, \infty)$ und $x \in (-\infty, -10]$ gelöst.

Beweis. Sei x eine Lösung der Ungleichung. Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

(1) Angenommen, $|x+1| - 4 \geq 0$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} & ||x+1|-4| \geq 5 \\ \Leftrightarrow \quad & |x+1| - 4 \geq 5 \\ \Leftrightarrow \quad & |x+1| \geq 9. \end{aligned}$$

(1.A) Angenommen, $x + 1 \geq 0$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} & |x+1| \geq 9 \\ \Leftrightarrow \quad & x+1 \geq 9 \\ \Leftrightarrow \quad & x \geq 8. \end{aligned}$$

(1.B) Angenommen, $x+1<0$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} & |x+1| \geq 9 \\ \Leftrightarrow \quad & -x-1 \geq 9 \\ \Leftrightarrow \quad & x \leq -10. \end{aligned}$$

(2) Angenommen, $|x+1|-4<0$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} & ||x+1|-4| \geq 5 \\ \Leftrightarrow \quad & -|x+1|+4 \geq 5 \\ \Leftrightarrow \quad & |x+1| \leq -1. \end{aligned}$$

Dieser Fall kann nicht eintreten, weil $|x+1|$ nach Definition immer nicht-negativ ist.

Folglich gilt:

- Wenn $x \in [8, \infty)$, dann $||x+1|-4| \geq 5$.
- Wenn $x \in (-\infty, -10]$, dann $||x+1|-4| \geq 5$.
- Wenn $||x+1|-4| \geq 5$, dann $x \in [8, \infty)$ oder $x \in (-\infty, -10]$.

Zusammengefasst lauten diese Aussagen: x löst die Ungleichung genau dann, wenn $x \in [8, \infty)$ oder $x \in (-\infty, -10]$. □

Alternativer Beweis. Zeichne die vier Funktionsgraphen der Funktionen $f_{+,+}$, $f_{+,-}$, $f_{-,+}$ und $f_{-,-}$ gegeben durch

$$f_{\pm,\pm}(x) = \pm\big(\pm(x+1)-4\big).$$

Sei

$$f(x) = ||x+1|-4|\,.$$

Für negative Werte von x mit großem Betrag gilt $f(x) = f_{+,-}(x)$. Man erhält dann den Graphen von f, indem man von ∞ kommend dem Graphen von $f_{+,-}$ bis zum Schnittpunkt mit einem der Graphen von $f_{+,+}$, $f_{-,+}$ oder $f_{-,-}$ kommt. (In diesem Fall schneiden sich $f_{+,-}$ und $f_{-,-}$ im Punkt $(-5,0)$) Folge dann dem geschnittenen Graphen bis zum nächsten Schnittpunkt mit einem der anderen Graphen und wiederhole diesen Schritt, bis der Graph weit genug gezeichnet ist.

In Abbildung 7.1 sind die Funktionen f und $f_{\pm,\pm}$ gezeichnet.

Die Lösung der Ungleichung sind nun alle x, bei denen der Funktionsgraph von f oberhalb dem Funktionsgraph der rechten Seite der Ungleichung, d.h. oberhalb der Funktion $g(x)=5$ verläuft. Das zeigt ebenfalls die Behauptung. □

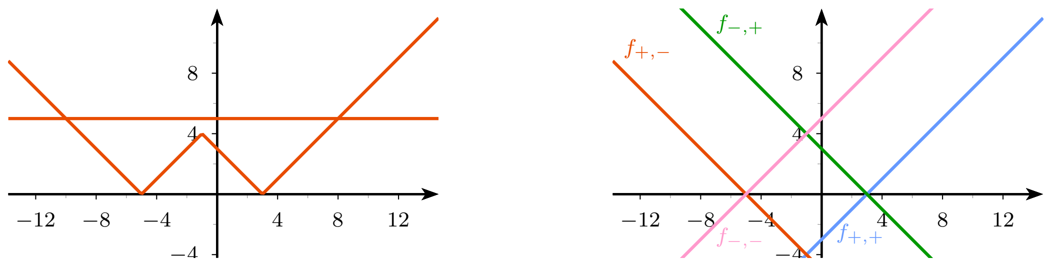


Abbildung 7.1: Links: Die Funktion f und die konstante Funktion $g(x) = 5$. Rechts: Die Funktionen $f_{\pm,\pm}$.

7.6 Aufgaben

5.1. Zeige: Für alle $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ gilt

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \tag{7.9}$$

und

$$(x + y) \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4. \tag{7.10}$$

In welchem Fall gilt Gleichheit?

5.2. Zeige: Für alle $x, y, z \in \mathbb{Q}$ gilt

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx. \tag{7.11}$$

5.3. Zeige: Für alle $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ gilt

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y}. \tag{7.12}$$

5.4. Zeige: Für alle $x, y, z \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ gilt

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) \leq 3(x^4 + y^4 + z^4). \tag{7.13}$$

Gilt die Ungleichung auch für alle $x, y, z \in \mathbb{Q}$ (d.h. auch negative Werte sind erlaubt)?

5.5. Zeige: Für alle $x, y, z \in \mathbb{Q}$ gilt

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2(xy + yz + yz). \tag{7.14}$$

5.6. Zeige: Für alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$ gilt

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq ab^2c + bc^2a + ca^2b. \tag{7.15}$$

Wann gilt Gleichheit?

5.7. Zeige: Für alle $x, y, z \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ gilt

$$(x + y + z)^3 \geq 5xyz.$$

5.8. Im Folgenden ist ein fehlerhafter Beweis für die Ungleichung $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2x}$, wobei $x \in \mathbb{Q}^*$, gegeben:

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x} \geq \frac{1}{2x} \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{4x^2} \\ \Rightarrow \quad & x^2 \leq 4x^2 \\ \Rightarrow \quad & 0 \leq 3x^2, \end{aligned}$$

was für alle $x \in \mathbb{Q}^*$ eine wahre Aussage ist. Also ist auch die erste Zeile $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2x}$ eine wahre Aussage. □

(a) Warum gilt die Ungleichung im Allgemeinen nicht? Gib ein Gegenbeispiel an.

(b) Wo ist der Fehler im Beweis?

5.9. Zeige: Die Mittelwerte AM, GM, HM und QM sind wirklich *mittel*, d.h., sie liegen zwischen dem kleinsten und dem größten der gemittelten Werte.

5.10. Zeige: Für alle x, $y \in \mathbb{Q}_{>0}$ gilt

$$\frac{4}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq (x+y)^2. \tag{7.16}$$

5.11. Zeige: Für x, $y \in \mathbb{Q}$ mit $x \geq 1$, $y \geq 1$ gilt

$$x^3 - 2xy + y^3 \geq 0. \tag{7.17}$$

5.12. Zeige: Für x, $y \in \mathbb{Q}$ mit $x \geq 1$, $y \geq 1$ gilt

$$x^4 + y^4 \geq x^2 y + y x^2. \tag{7.18}$$

5.13. Zeige: Für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt

$$||x-1| + |x+1|| \geq 2. \tag{7.19}$$

5.14. Seien x, $y \in \mathbb{Q}$.

(a) Beweise die *Dreiecksungleichung*

$$|x+y| \leq |x| + |y|\,. \tag{7.20}$$

(b) Beweise die *umgekehrte Dreiecksungleichung*

$$||x| - |y|| \leq |x-y|\,. \tag{7.21}$$

5.15. Seien x, $y \in \mathbb{Q}$. Gelten auch die folgenden Variationen der Dreiecksungleichung? Falls ja, gib einen Beweis an. Falls nein, gib ein Gegenbeispiel an.

(c) $|x-y| \leq |x| - |y|$,

(d) $||x| + |y|| \leq |x+y|$,

(e) $\sqrt{|x-y|} \geq \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}$,

(f) $\sqrt{|x+y|} \leq \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}$.

5.16. In Satz 7.2 wurde gezeigt: Wenn x und y das gleiche Vorzeichen haben und $x \neq 0$, $y \neq 0$, dann gilt

$$x \leq y \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}.$$

Benutze die Definition von "$\leq$" um zu zeigen: Wenn x und y unterschiedliches Vorzeichen haben und $x \neq 0$, $y \neq 0$, dann gilt

$$x \leq y \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}.$$

5.17. Zeige: Für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\left|4 - x^2\right| + 8 - 4x \geq 0. \tag{7.22}$$

5.18. Für welche $x \in \mathbb{Q}$ gilt

$$|2x - 4| \leq |3x - 5| \leq |4x - 6|? \tag{7.23}$$

5.19. Ermittle die Lösungsmenge der Ungleichung

$$\left|\left|x^2 - 1\right| - 1\right| \geq 1 \tag{7.24}$$

grafisch, ähnlich dem Beweis des Beispiels in Abschnitt 7.5.

5.20. Betrachte die Beispielungleichung $||x + 1| - 4| \geq 5$ aus Abschnitt 7.5. Ändere die Zahlen $+1$, -4 und/oder $+5$, sodass die Lösungsmenge nicht nur zwei Zusammenhangskomponenten, sondern drei hat.

Hinweis: Es kann hilfreich sein, hier mit Abbildung 7.1 zu argumentieren.

5.21. *Vortragsthema: Hölder-Mittel.* Definiere das Hölder-Mittel (oder auch *Potenzmittel*) und erkläre, in welchem Sinne AM, GM, HM und QM Spezialfälle dieses Mittels sind. (Für den Fall GM ist das nicht offensichtlich und ein exakter Beweis ist nicht erwartet, eine anschauliche Erklärung genügt) Nenne die *Wichtige Ungleichung für Hölder-Mittel* (diese Bezeichnung ist keine Standardbezeichnung, gemeint ist die Ungleichung $p < q \Rightarrow \text{Hölder}_p \leq \text{Hölder}_q$) und erkläre, wie die Mittelungleichungen (siehe Satz 7.6) daraus folgen.

5.22. Aufgaben der Mathematik-Olympiade: 550714, 550832, 500824, 470846, 470836, 400823, 390813, 360831

Index